由一道考题出发探究圆锥曲线中一组定值性质

■ 耿开鹏

摘要:本文对一道海口市高三模考中的解析几何定值问题进行探究,得到了椭圆中的几个斜率定值和系数定值的优美结论,并通过类比得了双曲线和抛物线中的相关结果.

关键词:圆锥曲线;斜率;系数;定值;顶点

一、试题呈现

题目 (2022年4月海南省海口市高三四模)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,左、右焦点分别为 F_1,F_2,点 P 是 C 上一点,$PF_1\perp PF_2$,且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为3.

(Ⅰ)求 C 的方程;

(Ⅱ)过 F_1 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点,与直线 $x=-3$ 交于点 D,从下面两个问题中选择一个进行解答:

① 设 $E(2,0)$,直线 EA,EB,ED 的斜率分别为 $k_1,k_2,k_3(k_3\neq 0)$,证明:$(k_1+k_2)\cdot k_3$ 为定值;

② 设 $\overrightarrow{AD}=\lambda_1\overrightarrow{AF_1},\overrightarrow{BD}=\lambda_2\overrightarrow{BF_1}$,证明:$\lambda_1+\lambda_2$ 为定值.

答案:(Ⅰ) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$;

(Ⅱ)①$(k_1+k_2)\cdot k_3=-\frac{2}{5}$;②$\lambda_1+\lambda_2=\frac{2}{3}$.

二、推广探究

将试题中椭圆方程,点 F_1 的坐标和直线 $x=-3$ 的方程一般化,再依照第(Ⅱ)问选择项①进行推广得到:

命题1:设 E 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点,过点 $S(s,0)(s\neq\pm a)$ 的直线与椭圆交于 A,B 两点,与直线 $x=t(t\neq\pm a,t\neq s)$ 交于点 D,直线 EA,EB,ED 的斜率分别为 $k_1,k_2,k_3(k_3\neq 0)$,则 $(k_1+k_2)\cdot k_3=-\frac{2b^2(s-t)}{a(s-a)(t-a)}$.

证明:平移坐标系使坐标原点移至点 E,则椭圆方程变为 $\frac{(x+a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,即

$$b^2x^2+2ab^2x+a^2y^2=0,$$

点 S 的坐标变为 $(s-a,0)$,直线 $x=t$ 的方程变为 $x=t-a$. 因为 $k_3\neq 0$,所以直线 AB 的斜率不为0,在新坐标系下设其方程为 $x=my+s-a$,则 $\frac{x-my}{s-a}=1$,与椭圆方程联立得

$$b^2x^2+2ab^2x\cdot\frac{x-my}{s-a}+a^2y^2=0,$$

即 $(s-a)a^2y^2-2ab^2mxy+(s+a)b^2x^2=0$,

两边同时除以 x^2 得

$$(s-a)a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2-2ab^2m\cdot\frac{y}{x}+(s+a)b^2=0,$$

在新坐标系下设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,因为平移后斜率不变,所以

$$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=\frac{2ab^2m}{(s-a)a^2}=\frac{2b^2m}{a(s-a)}.$$

显然 $m\neq 0$,则 $D\left(t-a,\frac{t-s}{m}\right)$,故 $k_3=\frac{t-s}{m(t-a)}$,

所以 $(k_1+k_2)\cdot k_3=-\frac{2b^2(s-t)}{a(s-a)(t-a)}$.

将命题1中右顶点改为左顶点,可得:

命题2:设 E 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点,过点 $S(s,0)(s\neq\pm a)$ 的直线与椭圆交于 A,B 两点,与直线 $x=t(t\neq\pm a,t\neq s)$ 交于点 D,直线 EA,EB,ED 的斜率分别为 $k_1,k_2,k_3(k_3\neq 0)$,则 $(k_1+k_2)\cdot k_3=\frac{2b^2(s-t)}{a(s+a)(t+a)}$.

将命题1中点 S 的位置改为 y 轴上,右顶点改为上顶点,探究得到如下命题.

作者简介:耿开鹏(1985-),男,贵州省六盘水人,本科,中学二级教师,主要从事高中数学教学研究

万方数据

命题3[1]：设E为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点，过点$S(0,s)(s\neq\pm b)$的直线与椭圆交于$A,B$两点，与直线$y=t(t\neq\pm b,t\neq s)$交于点$D$，直线$EA$，$EB$，$ED$的斜率分别为$k_1,k_2,k_3$，则$(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2})\cdot\frac{1}{k_3}=-\frac{2a^2(s-t)}{b(s-b)(t-b)}$.

命题3的证明与命题1类似，略. 将命题3中上顶点改为下顶点，可得：

命题4：设E为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的下顶点，过点$S(0,s)(s\neq\pm b)$的直线与椭圆交于$A,B$两点，与直线$y=t(t\neq\pm b,t\neq s)$交于点$D$，直线$EA,EB$，$ED$的斜率分别为$k_1,k_2,k_3$，则$(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2})\cdot\frac{1}{k_3}=\frac{2a^2(s-t)}{b(s+b)(t+b)}$.

将试题第（Ⅱ）问选择项②进行推广得到如下命题.

命题5[2]：设过点$S(s,0)(s\neq\pm a)$的直线与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于$A,B$两点，与直线$x=t(t\neq\pm a,t\neq s)$交于点$D$，$\overrightarrow{AD}=\lambda_1\overrightarrow{AS}$，$\overrightarrow{BD}=\lambda_2\overrightarrow{BS}$，

则$\lambda_1+\lambda_2=\frac{2(a^2-st)}{a^2-s^2}$.

证明：设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(t,n)$，显然$\lambda_1\neq1,\lambda_2\neq1$，由$\overrightarrow{AD}=\lambda_1\overrightarrow{AS}$，得

$$(t-x_1,n-y_1)=\lambda_1(s-x_1,-y_1),$$

解得$A(\frac{t-s\lambda_1}{1-\lambda_1},\frac{n}{1-\lambda_1})$，代入椭圆方程得

$$b^2(\frac{t-s\lambda_1}{1-\lambda_1})^2+a^2(\frac{n}{1-\lambda_1})^2=a^2b^2,$$

整理成关于λ_1的一元二次方程得

$$(s^2-a^2)b^2\lambda_1^2+2b^2(a^2-st)\lambda_1+b^2t^2+a^2(n^2-b^2)=0,$$

由$\overrightarrow{BD}=\lambda_2\overrightarrow{BS}$同理可得

$$(s^2-a^2)b^2\lambda_2^2+2b^2(a^2-st)\lambda_2+b^2t^2+a^2(n^2-b^2)=0.$$

所以λ_1,λ_2是关于x的方程$(s^2-a^2)b^2x^2+2b^2(a^2-st)x+b^2t^2+a^2(n^2-b^2)=0$的两个解，故$\lambda_1+\lambda_2=\frac{2(a^2-st)}{a^2-s^2}$.

命题6：设过点$S(0,s)(s\neq\pm b)$的直线与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于$A,B$两点，与直线$y=t(t\neq\pm b,t\neq s)$交于点$D$，$\overrightarrow{AD}=\lambda_1\overrightarrow{AS}$，$\overrightarrow{BD}=\lambda_2\overrightarrow{BS}$，则$\lambda_1+\lambda_2=\frac{2(b^2-st)}{b^2-s^2}$.

三、类比探究

对双曲线进行探究，得到了与命题1、命题2、命题5类似的结果，证明过程略.

命题7：设E为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右顶点，过点$S(s,0)(s\neq\pm a)$的直线与双曲线交于$A$，$B$两点，与直线$x=t(t\neq\pm a,t\neq s)$交于点$D$，直线$EA$，$EB,ED$的斜率分别为$k_1,k_2,k_3(k_3\neq0)$，则$(k_1+k_2)\cdot k_3=\frac{2b^2(s-t)}{a(s-a)(t-a)}$.

命题8：设E为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点，过点$S(s,0)(s\neq\pm a)$的直线与双曲线交于$A,B$两点，与直线$x=t(t\neq\pm a,t\neq s)$交于点$D$，直线$EA,EB,ED$的斜率分别为$k_1,k_2,k_3(k_3\neq0)$，则$(k_1+k_2)\cdot k_3=-\frac{2b^2(s-t)}{a(s+a)(t+a)}$.

命题9：设过点$S(s,0)(s\neq\pm a)$的直线与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$交于$A,B$两点，与直线$x=t(t\neq\pm a,t\neq s)$交于点$D$，$\overrightarrow{AD}=\lambda_1\overrightarrow{AS}$，$\overrightarrow{BD}=\lambda_2\overrightarrow{BS}$，则$\lambda_1+\lambda_2=\frac{2(a^2-st)}{a^2-s^2}$.

对抛物线进行探究得到：

命题10：设过点$S(s,0)(s\neq0)$的直线与抛物线$y^2=2px(p>0)$交于A,B两点，与直线$x=t(t\neq0,t\neq s)$交于点D，O为坐标原点，直线OA，OB,OD的斜率分别为k_1,k_2,k_3，则$(k_1+k_2)\cdot k_3=\frac{2p(s-t)}{st}$.

证明：设直线AB方程为$x=my+s$，即$\frac{x-my}{s}=1$，

万方数据

与抛物线方程联立得

$$y^2-2px\cdot\frac{x-my}{s}=0.$$

即 $sy^2+2pmxy-2px^2=0$,

两边同时除以 x^2 得

$$s(\frac{y}{x})^2+2pm\cdot\frac{y}{x}-2p=0$$

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则

$$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=-\frac{2pm}{s}.$$

显然 $m\neq0$,则 $D(t,\frac{t-s}{m})$,故 $k_3=\frac{t-s}{mt}$,所以

$$(k_1+k_2)\cdot k_3=\frac{2p(s-t)}{st}.$$

命题 11:设过点 $S(s,0)(s\neq0)$ 的直线与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点,与直线 $x=t(t\neq0,t\neq s)$ 交于 D, $\overrightarrow{AD}=\lambda_1\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BD}=\lambda_2\overrightarrow{BS}$,则 $\lambda_1+\lambda_2=\frac{s+t}{s}$.

证明:设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $D(t,n)$,显然 $\lambda_1\neq1$, $\lambda_2\neq1$,由 $\overrightarrow{AD}=\lambda_1\overrightarrow{AS}$ 得

$$(t-x_1,n-y_1)=\lambda_1(s-x_1,-y_1),$$

解得 $A(\frac{t-s\lambda_1}{1-\lambda_1},\frac{n}{1-\lambda_1})$,代入抛物线方程得

$$(\frac{n}{1-\lambda_1})^2=2p\cdot\frac{t-s\lambda_1}{1-\lambda_1}.$$

整理成关于 λ_1 的一元二次方程得

$$2ps\lambda_1^2-2p(s+t)\lambda_1+2pt-n^2=0.$$

由 $\overrightarrow{BD}=\lambda_2\overrightarrow{BS}$ 同理可得

$$2ps\lambda_2^2-2p(s+t)\lambda_2+2pt-n^2=0$$

所以 λ_1,λ_2 是关于 x 的方程

$$2psx^2-2p(s+t)x+2pt-n^2=0$$

的两个解,故 $\lambda_1+\lambda_2=\frac{s+t}{s}$.

参考文献:

[1] 高继浩. 探究一道斜率之比为定值的联考试题[J]. 数学通讯:上半月,2021(10):36 - 37.

[2] 项海圆,黄永明. 巧用齐次化方法解圆锥曲线问题[J]. 中学数学教学参考:上旬,2021(3):40 - 42.

[贵州省六盘水市民族中学(553000)]

(上接第 9 页)

的四个交点的横坐标依次为 $x_1,x_2,x_3,x_4(x_1<x_2<x_3<x_4)$,则 $x_1+x_4=x_2+x_3$.

六、教学启示

2022 年高考已经尘埃落定,留给大家的是无数的探究与反思. 在深入研究试题的同时,一线教师也做出了深刻的反思. 试题难在何处? 在今后的教学工作中如何教以更好地适应考? 通过对本道高考试题的分析,不难体会到高考试题命题来源于教材,背景十分平和,熟悉,但是设问十分灵活,不走寻常路,解决方法是通性通法,没有半点特殊技巧. 因此,我们可以看新高考试题命题的特点在于平凡之处隐含创新精神,通法之处体现探究韵味[2]. 所以在教学当中,应当强化以下几点.

第一,新授课要注重概念讲解,让学生明白知识的来龙去脉. 概念是数学解题的基础,是命题老师命制试题的出发点. 比如本题中的指对转化就是教材中的内容. 如果教师能够在课堂教学中把指数式,对数式的概念讲解清楚,学生就能够熟练的转化,体会同构的思想. 因此,新高考试题注重对概念的考查,这对中学数学教学起到了指明方向的重要作用. 教师要舍得花时间,引导学生主动探究,不能将数学学习等同于机械刷题.

第二,复习课要强调专题讲解,以典型的高考试题为例,强化一类题型,方法的运用. 教师要善于做好教学设计,提前精心选题,以典型的试题带动一类题型,一类方法,在减轻学生学习负担的同时让学生会一题即会一类. 这就要求教师必须自己先入题海,研究透试题,才能把最好的奉献给学生. 因此,新高考对教师的能力提出了更高的要求. 对于解题方法的选取,要来源于教材,通俗易懂,不要过分运用技巧,要让学生容易接受从而形成正迁移而不是死记硬背.

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准:2017 年版[M]. 北京:人民教育出版社,2017.

[2] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京:人民教育出版社,2019.

[1. 福建省漳州龙海第一中学新校区(363100)
2. 福建省漳州市教育科学研究院(363100)]

万方数据