对一道2022年复旦大学强基计划试题的探究

■ 张志刚

摘　要:对一道2022年复旦大学强基计划三元最值试题进行探究,分别从转化为一元函数最值、不等式放缩等视角尝试消参减元.比较各解法可知,利用正切恒等式解答可规避多次消元及换元的繁琐推演,进而对正切恒等式进行了推广.

关键词:极值问题;正切恒等式;消元;数学运算

一、试题呈现

(2022年复旦大学强基计划测试第1题)在锐角$\triangle ABC$中,$\sin A=2\sin B\sin C$,求$\tan A\tan B\tan C$的最小值.

本题以三角形为载体,探求三元函数的最值问题,考查数学运算、逻辑推理、数学抽象等核心素养,试题设计简洁清新,思维跨度较大,颇具综合性、挑战性和选拔性,具有较高的研究价值.

二、试题解答

对于多元函数最值问题,消参减元是贯穿解题过程的一条主线,即把多变量问题转化为二元(或一元)函数或方程问题[1].具体到本题,可通过消元转化为一元函数最值问题(解法1、2),不等式放缩(解法3、4)等视角寻求突破.解答过程中需要适时采用换元法、放缩法、配方法、构造法及函数与方程、转化与化归等数学思想方法,最终实现降幂、化简、消元之目的.此外,由于本题中变元是三角形的三个内角,注意三角形内角和定理的应用.

思路:转化为一元函数最值

解法1:换元法

由$\sin A=2\sin B\sin C$,即$\sin(B+C)=2\sin B\sin C$,亦即$\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$,等式两边同时除以$\cos B\cos C$,得$\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$,故$\tan A=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\dfrac{2\tan B\tan C}{\tan B\tan C-1}$,则$\tan A\tan B\tan C=\dfrac{2(\tan B\tan C)^2}{\tan B\tan C-1}$.令$t=\tan B\tan C-1$,又在锐角$\triangle ABC$中,$\tan A\tan B\tan C>0$,从而$\tan B\tan C-1>0$,即$t>0$.所以$\tan A\tan B\tan C=\dfrac{2(t+1)^2}{t}=2(t+\dfrac{1}{t}+2)\geqslant 2(2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}+2)=8$,当且仅当$t=\dfrac{1}{t}$即$t=1$时取等号.

此时$\begin{cases}\tan A=4\\ \tan B\tan C=2\\ \tan B+\tan C=4\end{cases}$,

解得$\begin{cases}\tan A=4\\ \tan B=2+\sqrt{2}\\ \tan C=2-\sqrt{2}\end{cases}$

或$\begin{cases}\tan A=4\\ \tan B=2-\sqrt{2}\\ \tan C=2+\sqrt{2}\end{cases}$,

所以$\tan A\tan B\tan C$的最小值是8.

点评:本题中变元是三角形的三个内角,由三角形内角和定理得$\tan A=-\tan(B+C)$,结合两角和的正切公式得$\tan A\tan B\tan C=\dfrac{2(\tan B\tan C)^2}{\tan B\tan C-1}$,从而将变元$A$消掉,再通过换元$t=\tan B\tan C-1$,进一步转化为关于$t$的一元函数最值问题.

解法2:构造等差数列

同解法1得$\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$,等式两边同时除以$\tan B\tan C$,有$\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=2=2\times 1$,则正数$\dfrac{1}{\tan B},1,\dfrac{1}{\tan C}$构成一个等差数列,设其公差为$d$,即$\dfrac{1}{\tan B}$

作者简介:张志刚(1983-),男,山东省宁阳人,本科,一级教师,主要从事中学数学教学研究

$=1-d,\dfrac{1}{\tan C}=1+d$,从而 $\tan B=\dfrac{1}{1-d},\tan C=\dfrac{1}{1+d}$,

$$\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=$$

$$-\frac{\dfrac{1}{1-d}+\dfrac{1}{1+d}}{1-\dfrac{1}{1-d}\cdot\dfrac{1}{1+d}}=\frac{2}{d^2},$$

所以 $\tan A\tan B\tan C=\dfrac{2}{d^2}\cdot\dfrac{1}{1-d}\cdot\dfrac{1}{1+d}=$

$$\frac{2}{d^2(1-d^2)}\geqslant\frac{2}{\left(\dfrac{d^2+1-d^2}{2}\right)^2}=8.$$

当 $d^2=1-d^2$ 即 $d=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号,所以 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是 8.

点评:本题得到 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$ 后,继续变形得 $\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=2\times1$,发现 $\dfrac{1}{\tan B},\dfrac{1}{\tan C}$ 是 1 的等差中项,于是可构造一个等差系列,进而将 $\tan B,\tan C,\tan A$ 都用公差 d 表示,从而将问题转化为关于 d 的一元函数最值问题.

解法 3:利用基本不等式放缩

同解法 1 得 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$. 又 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$,所以 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+2\tan B\tan C$. 在锐角 $\triangle ABC$ 中,$\tan B>0,\tan C>0$,

所以由基本不等式得 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+2\tan B\tan C\geqslant2\sqrt{\tan A\cdot2\tan B\tan C}$,

从而 $\tan A\tan B\tan C\geqslant2\sqrt{\tan A\cdot2\tan B\tan C}$,解得 $\tan A\tan B\tan C\geqslant8$,当且仅当 $\tan A=2\tan B\tan C=4$

即 $\begin{cases}\tan A=4\\ \tan B=2+\sqrt{2}\\ \tan C=2-\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\tan A=4\\ \tan B=2-\sqrt{2}\\ \tan C=2+\sqrt{2}\end{cases}$ 时取等号,故 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是 8.

点评:解法 3 运用性质 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$,化积为和,结合已知条件 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$ 与基本不等式构造了关于乘积式 $\tan A\tan B\tan C$ 的不等式. 在运用基本不等式时,要注意检验等号能否成立.

解法 4:利用基本不等式放缩

同解法 1 得 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$,即有 $\tan B\tan C=\dfrac{\tan B+\tan C}{2}$,由基本不等式得 $2\tan A\tan B\tan C=\tan A(\tan B+\tan C)\leqslant\left(\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C}{2}\right)^2$,又 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$,所以 $2\tan A\tan B\tan C\leqslant\left(\dfrac{\tan A\tan B\tan C}{2}\right)^2$,解得 $\tan A\tan B\tan C\geqslant8$. 当且仅当 $\tan A=\tan B+\tan C$

即 $\begin{cases}\tan A=4\\ \tan B=2+\sqrt{2}\\ \tan C=2-\sqrt{2}\end{cases}$

或 $\begin{cases}\tan A=4\\ \tan B=2-\sqrt{2}\\ \tan C=2+\sqrt{2}\end{cases}$

时等号成立,所以 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是 8.

点评:解法 4 运用性质 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$,化和为积,构造了关于乘积式 $\tan A\tan B\tan C$ 的不等式,解题效益大幅提高.

比较上述几种解法,解法 1 借助三角形内角和定理实现首次消元,再令 $t=\tan B\tan C-1$ 进行二次消元,再结合基本不等式求得一元函数的最值,思维跨度较大,运算过程较为繁琐;解法 2 经历多次变形,敏锐发现了等差数列模型,进而设出等差数列的公差 d,并最终将问题转化为关于 d 的一元函数最值,方法不可谓不妙,但需要考生丰富的想象能力和较强的运算求解能力;解法 3 和 4 充分利用应用性质 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$,"化积为和"或"化和为积",回避了解法 1,2 中多次消元及换元的繁琐运算,进退自如,简捷明快.

三、问题溯源

解法 3 和 4 中应用的性质"$\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$",源于《普通高中标准实验教科书数学·必修 4·B 版》(人民教育出版社 2007 年版第 2 版)第 154 页第 7 题:

在斜 $\triangle ABC$ 中,求证:$\tan A+\tan B+\tan C$

$=\tan A\tan B\tan C$.

证明：由两角和的正切公式 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$，得 $\tan A+\tan B=\tan(A+B)-\tan A\tan B\tan(A+B)$，即 $\tan A+\tan B=\tan(\pi-C)-\tan A\tan B\tan(\pi-C)$，即有 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

上题揭示了斜三角形的一个独特、奇妙的结论：三内角正切值的乘积等于正切值的和，故可称为“正切恒等式”，利用此等式可实现三角形三内角正切值“积”与“和”的互相转化，在探求三角定值、极值等问题中发挥着重要作用，下面再举两例说明.

例 1　(2021 年北京大学优秀中学生寒假学堂第 17 题) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求 $\tan A\tan B+2\tan B\tan C+3\tan A\tan C$ 的最小值.

解析：在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\tan A,\tan B,\tan C>0$，又 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$，等式两边同时除以 $\tan A\tan B\tan C$，得 $\frac{1}{\tan A\cdot\tan B}+\frac{1}{\tan B\cdot\tan C}+\frac{1}{\tan C\cdot\tan A}=1$.

由柯西不等式得：$\left(\frac{1}{\tan A\cdot\tan B}+\frac{1}{\tan B\cdot\tan C}+\frac{1}{\tan C\cdot\tan A}\right)\cdot(\tan A\tan B+2\tan B\tan C+3\tan A\tan C)\geqslant(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$，当且仅当 $\tan A\tan B=\sqrt{2}\tan B\tan C=\sqrt{3}\tan C\tan A$ 时取等号，所以 $\tan A\tan B+2\tan B\tan C+3\tan A\tan C$ 的最小值是 $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$.

例 2　在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $(b-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$，且 $a=2$，则 $\frac{\tan A}{\tan B\tan C}$ 的最大值为 ______.

解析：由题意得 $b\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，即 $b\cos A=\sin(A+C)=\sin B$，

从而 $\frac{1}{\cos A}=\frac{b}{\sin B}$，由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\frac{1}{\cos A}=\frac{a}{\sin A}$，得 $\tan A=2$.

又 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$，即 $2\tan B\tan C=2+\tan B+\tan C$.

在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\tan B>0,\tan C>0$，由基本不等式得 $2+\tan B+\tan C\geqslant 2+2\sqrt{\tan B\tan C}$，从而 $2\tan B\tan C\geqslant 2+2\sqrt{\tan B\tan C}$，解得 $\tan B\tan C\geqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，当 $\tan B=\tan C=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时取等号，所以 $\frac{\tan A}{\tan B\tan C}=\frac{2}{\tan B\tan C}\leqslant\frac{2}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=3-\sqrt{5}$，即 $\frac{\tan A}{\tan B\tan C}$ 的最大值为 $3-\sqrt{5}$.

四、结论推广

对正切恒等式推广，可得如下结论：

结论 1：已知 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi(k\in Z)$，且 $\alpha,\beta,\gamma\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，则 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$.[2]

证明：当 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 且 $\alpha,\beta,\gamma\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\alpha+\beta=k\pi-\gamma$，等式两边同时取正切得，$\tan(\alpha+\beta)=\tan(k\pi-\gamma)$，

即 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\tan\gamma$，进而 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$.

例 3　在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$$

证明：在 $\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，可得 $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=0$，所以 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$，

亦即 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}-\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}=$

(下转第 8 页)

点与极线,如图5,设直线 MN 与直线 l 交于点 Q,则由引理1可知 M,N,P,Q 是调和点列,故由定义2得 $\frac{MP}{NP}=\frac{MQ}{NQ}$,即 $\frac{NQ}{MQ}=\frac{NP}{MP}$,所以 N,M,Q,P 是调和点列,故由定义3知直线 AN,AM,AQ,AP 为一簇调和线束,即直线 AH,AM,AT,AP 为一簇调和线束. 因为 AP 平行于 HM,故由引理3可知 AT 平分线段 HM,即 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$.

双曲线和抛物线有与探究4类似的结果(不再赘述),于是我们得到:

结论:设过点 P 的直线交圆锥曲线 E 于 M,N 两点,曲线 E 的 P 所对应的极线交曲线 E 于 A,B 两点,过 M 且平行于 AP 的直线与线段 AB 交于点 T,点 H 在直线 MT 上,则 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$ 的充要条件是直线 HN 过定点 A.

解析几何解答题有较强的综合性,对学生运算能力和逻辑推理能力要求高,而很多解析几何综合题都蕴含着相同的命制背景,因此在日常教学中应对解析几何中的典型问题进行挖掘,探究其本质,实现"研一题,通一类"[4],达到深度学习的目的.

参考文献:

[1] 周阳. 极点与极线的调和性在高考中的应用[J]. 中学数学教学参考:上旬,2022(1):50-52.

[2] 李路军,李洪景. 调和点列及调和线束性质的证明与应用举例[J]. 中学数学研究:上半月·广东,2020(5):44-47.

[3] 曾建国. 调和点列:一道2017年北京高考题的背景分析及应用[J]. 数学通讯:下半月,2017(12):59-60.

[4] 高继浩. 探寻本质 触类旁通——对2022年高考全国甲卷解析几何解答题的探究[J]. 数学通讯:下半月,2022(11):41-43,59.

[1. 四川省名山中学(625100)
2. 陕西省汉阴县汉阴中学(725199)]

(上接第5页)

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\left(-\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\right)$,等式两边同时乘以 $\tan\frac{C}{2}$,得

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$.

易知结论1的逆命题亦成立,即得结论2.

结论2:当 $\alpha,\beta,\gamma\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,若 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$,则 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

由此可知,等式"$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$"成立的充要条件是"$\alpha+\beta+\gamma=k\pi(k\in Z)$ 且 $\alpha,\beta,\gamma\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$".

例4 (2015年全国高中数学联赛新疆赛区预赛高一第4题) 已知 α,β 均为锐角,且 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$,则 $\alpha+\beta=$ ________.

解析:由题意得 $1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=2$,即 $\tan\alpha+\tan\beta-1=-\tan\alpha\tan\beta$,亦即 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\alpha\tan\beta\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $\alpha+\beta+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 α,β 均为锐角,$0<\alpha+\beta<\pi$,所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

通过以上分析可以看出,应用以上结论可以有效突破思维瓶颈,降低思维难度、大幅减少运算量,加快解题进程,促使问题顺利解决.

参考文献:

[1] 张志刚. 一道清华大学新领军TACA试题背景揭示与多解[J]. 中学数学研究:华南师范大学版,2022(23):27-30.

[2] 方亚斌. 一题一课·高考数学命题探秘[M]. 杭州:浙江大学出版社,2019.

[山东省宁阳县复圣中学(271400)]