

基于核心素养的课堂教学案例研究

——以“空间向量基本定理”为例

安徽省宿州市第二中学 杜文伟 (邮编:234000)

摘要 对普通高中数学教科书人教版选择性必修一第一章第二节空间向量基本定理进行教学设计,主要包括教材分析、教学分析及目标和重难点分析,结合向量共线定理、平面向量基本定理,从一维、二维角度出发,类比概括出空间向量基本定理,以空间向量基本定理为载体,培养学生的数学抽象、直观想象、数学运算、逻辑推理等数学核心素养,提高学生的数学基本能力,积累基本活动经验。

关键词 空间向量;共面;核心素养

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订版)》明确指出数学是研究数量关系和空间形式的一门科学,数学源于对现实世界的抽象,基于抽象结构,通过符号运算,形成推理和模型建构等,明确高中数学课程要以学生发展为本,落实立德树人根本任务,培养科学精神和创新意识,提升数学学科核心素养,要优化课程结构,突出主线,精选内容。在教学中,要把握数学本质,启发思考,改进教学,要聚焦数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等六大核心素养,提升学生应用数学解决实际问题的能力。不断引导学生感悟数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。

1 基于核心素养的教材分析

本节教材从空间中三个两两垂直的不共面的向量这一特殊情况出发,类比平面向量基本定理,给出空间向量基本定理。“空间向量基本定理”揭示出空间任一向量都可以用三个不共面的向量表示,因此空间中三个不共面的向量就构成了三维空间的一个“基底”,是立体几何问题代数化的基础,教科书将这一内容单列一节,正是因为“空间向量基本定理”的重要作用,不仅让学生掌握空间向量基本定理,还应用向量方法解决立体几何的一些问题,突出了空间向量基本定理在本章内容中承上启下的作用,而且可以使学生更好地掌握用空间向量解决立体几何问题的基本方法,也为后续学习空间向量及其运算的坐标表示奠定坚实基础。

2 基于核心素养的教学分析

2.1 数学抽象的分析

数学抽象是通过对数量关系与空间形式的抽象,得到数学研究对象的素养。数学抽象是数学的基本思想,是从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构,并用数学语言予以表征,它反映了数学的本质。本节课,从学生已学的向量共线定理、平面向量基本定理出发,从一维角度、二维角度,上升到三维角度,通过对问题的猜想、探究,在具体情景中抽象出命题即得到“空间向量基本定理”,以简驭繁,运用数学抽象的思维方式思考并解决问题。

2.2 直观想象的分析

直观想象是借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化,利用空间形式特别是图形,理解和解决数学问题的素养。直观想象是发现和提出问题、分析和解决问题的重要手段,是探索和形成论证思路、进行数学推理、构建抽象结构的思维基础。本节课,在平面向量基本定理的基础上,利用类比的方法探究理解空间向量基本定理,经历由平面向量推广到空间向量的过程体验,体会平面向量和空间向量的共性和差异,感悟向量是研究几何问题的有效工具。由于恰当选择基底依赖于对立体图形基本元素及其基本关系的把握,需要学生有较强的空间想象能力,这对学生而言存在一定的困难,教学时需注意引导学生从几何图形的组成元素及其基本关系上加强分析。

本节课还涉及到数学运算、逻辑推理核心素养,在此不作赘述。

3 教学目标及重难点

3.1 教学目标

(1)了解空间向量基本定理及其意义,掌握空间向量的正交分解;

(2)掌握空间向量的线性运算,会选用空间三个不共面的向量为基底表示其它的向量;

(3)空间向量基本定理的简单应用.

3.2 重难点

重点:空间向量基本定理;

难点:基底的恰当选择.

4 教学设计

4.1 设置情景,探索本质

问题 1 平面内的任意一个向量都可以用两个不共线的向量来表示,这是平面向量基本定理.那么在空间中,如何选择向量,可以表示空间中的任意一个向量呢?

请同学们思考:

如图 1,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DD_1} = \mathbf{c}$.

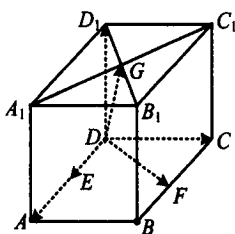


图 1

(1)若 E 为 AD 的中点,能用 \mathbf{a} 表示 \overrightarrow{DE} 吗?

(2)若 F 为 BC 靠近点 B 的三等分点,能用 \mathbf{a} 表示 \overrightarrow{DF} 吗?如果不能,如何表示 \overrightarrow{DF} ?

(3)若 G 为 A_1C_1 和 B_1D_1 的交点,能用 \mathbf{a} 表示 \overrightarrow{DG} 吗?能用 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表示 \overrightarrow{DG} 吗?如果不能,如何表示 \overrightarrow{DG} ?

设计意图 使学生从已学习过的向量共线定理、平面向量基本定理出发,运用类比思想,探索空间中的任意一个向量如何用已知向量表示,并且已知向量须满足哪些条件,探索空间向量基本定理,为空间向量的正交分解埋下伏笔.

4.2 层次递进,形成概念

问题 2 如图 2,设 i, j, k 是空间中三个两两垂直的向量,且表示它们的有向线段有公共起点 O ,对于任意一个空间向量 p ,如何用 i, j, k 表示?

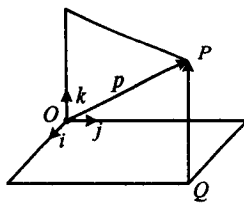


图 2

学生:设 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, \overrightarrow{OQ} 为 \overrightarrow{OP} 在 i, j 所确定的平面上的投影向量,则 \mathbf{p}

$= \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$, 即可得到,存在唯一的有序实数组 (x, y, z) ,使得 $\mathbf{p} = xi + yj + zk$. 我们称 xi, yj, zk 分别为 \mathbf{p} 在 i, j, k 上的分向量.

追问 1 在空间中,如果用任意三个不共面的向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 代替两两垂直的向量 i, j, k ,你能得出类似的结论吗?

学生:由向量共线定理和平面向量基本定理,类比是可以得到类似结论的.

追问 2 类比平面向量基本定理,你能总结空间向量基本定理的内容吗?

学生:如果三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面,那么对任意一个空间向量 \mathbf{p} ,存在唯一的有序实数组 (x, y, z) ,使得 $\mathbf{p} = xa + yb + zc$.

我们称 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为空间的一个基底, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 都叫做基向量.

追问 3 类比向量共线定理和平面向量基本定理,如何证明空间向量基本定理?(学生小组合作探究)

教师总结 要证明空间向量基本定理,既要证明唯一性,也要证明存在性.

(1)唯一性的证明(反证法)

假设除 (x, y, z) 外,还存在另一有序实数组 (x', y', z') ,使得 $\mathbf{p} = x'a + y'b + z'c$,则 $x'a + y'b + z'c = xa + yb + zc$.

①若 $x' = x$,则 $y'b + z'c = yb + zc$,即 $(y' - y)b = (z - z')c$,由向量共线定理知 $b // c$,这与已知三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面矛盾;

②若 $x' \neq x$,则 $(x' - x)a = (y - y')b + (z - z')c$,两边同除以 $x' - x$,得

$$\mathbf{a} = \frac{y - y'}{x' - x} \mathbf{b} + \frac{z - z'}{x' - x} \mathbf{c}$$

可知, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面,这与已知三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面矛盾.所以有序实数组 (x, y, z) 是唯一的.

(2)存在性的证明

如图 3,设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面,过点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$,过点 P 作直线 PP' 平行于 OC ,交平面 OAB 于点 P' ,在平面 OAB 内,过点 P' 作直线 $P'A' // OB$, $P'B' // OA$,分别与直线 OA, OB 相较于点 A', B' ,由向量共线定理知,存在三个实数 x, y, z ,使: $\overrightarrow{OA'} = x\overrightarrow{OA} = xa$, $\overrightarrow{OB'} = y\overrightarrow{OB} = yb$, $\overrightarrow{P'P} = z\overrightarrow{OC} = zc$,

$$\text{从而 } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{P'P} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

$+z\vec{OC}$, 所以 $p=xa+yb+z c$, 所以有序实数组 (x, y, z) 是存在的.

综上(1)(2)即得出空间向量基本定理的证明.

追问 4 通过空间向量基本定理及其证明过程, 你能提炼出空间向量基本定理的核心内容吗?

学生:(1)任意性: 用空间三个不共面的向量可以线性表示出空间中任意一个向量. (2)唯一性: 基底确定后, 空间向量基本定理中的实数组 (x, y, z) 是唯一的.

追问 5 关于空间向量基本定理中的基底和基向量, 你有哪些认识? (学生小组合作探究, 小组代表总结)

学生代表总结 (1)一个基底是由三个不共面的向量组成的一个向量组, 一个基向量是指基底中的某一个向量, 二者是相关联的不同概念. (2)基底的选择一般有两个条件: ①基底必须是不共面的非零向量; ②在进行基底选择时要尽量选择已知角度和长度的向量, 这样在进行相关运算时会更方便. (3)因为零向量与任意一个向量共线, 与任意两个不共线的向量共面, 所以如果三个向量不共面, 则它们均不是零向量. (4)单位正交基底: 如果空间的一个基底中的三个基向量两两垂直, 且长度都为 1, 那么这个基底叫做单位正交基底, 常用 $\{i, j, k\}$ 表示. (5)正交分解: 把一个空间向量分解为三个两两垂直的向量, 叫做把空间向量进行正交分解.

思考 (1)已知 $\{a, b, c\}$ 是空间的一个基底, 从 a, b, c 选哪一个向量, 一定能与向量 $p=a+b, q=a-b$ 构成空间的另一个基底? (答案: c)

(2)已知 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间的一个基底, 且 $\vec{OA}=e_1+2e_2-e_3, \vec{OB}=-3e_1+e_2+2e_3, \vec{OC}=e_1+e_2-e_3$, 试判断 $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ 能否作为空间的一个基底? 若能, 试以此基底表示向量 $\vec{OD}=2e_1-e_2+3e_3$; 若不能, 请说明理由.

(答案: 能; $\vec{OD}=17\vec{OA}-5\vec{OB}-30\vec{OC}$)

设计意图 通过课堂及时反馈, 进一步加深

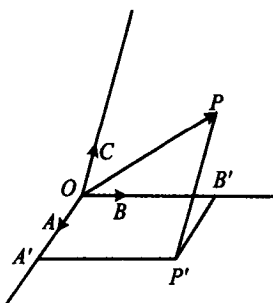


图 3

学生对定理的理解, 提高学生解决问题的能力. 空间向量正交分解与平面向量的正交分解类似, 区别仅在于基底中多了一个向量, 从而分解结果中也多了一“项”, 教学中, 不仅要引导学生利用平面向量的正交分解得到空间向量的正交分解, 还要引导学生注意这种差异, 通过引导学生比较两者的差异, 从而得到定理证明思路的启发, 培养学生数学抽象、直观想象和逻辑推理的数学核心素养.

4.3 典例解析, 拓展延伸

例 1 如图 4, M 是四面体 $OABC$ 的棱 BC 的中点, 点 N 在线段 OM 上, 点 P 在线段 AN 上, 且 $MN = \frac{1}{2}ON$,

$AP = \frac{3}{4}AN$, 试用向量 \vec{OA} ,

\vec{OB}, \vec{OC} 表示 \vec{OP} .

变式 例 1 中, 用 $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AO}$ 表示 \vec{OP} (答案: $\vec{OP} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} - \frac{3}{4}\vec{AO}$).

设计意图 基底选定后, 空间任意一向量由基底唯一表示, 但基底不是唯一的, 选择不同的基底, 同一向量的表示则不同, 本例是用不同的三个不共面的向量作为基底表示一个具体

空间向量, 目的是加深学生对空间向量基本定理的理解.

例 2 如图 5, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=4, AD=4, AA_1=5, \angle DAB=60^\circ, \angle BAA_1=60^\circ, \angle DAA_1=60^\circ$, M, N 分别为 D_1C_1, C_1B_1 的中点, 求证: $MN \perp AC_1$.

设计意图 本例是利用空间向量基本定理证明两条线段互相垂直, 即只需证明两直线的方向向量的数量积为 0 即可, 在平行六面体中, 通常用同一顶点的三条棱对应的向量作为一个空间基底, 将相关向量用该基底表示, 进而求解证明, 培养了学生在空间图形中如何选择恰当的三个不共面的向量作为基底, 从而方便进一步求解

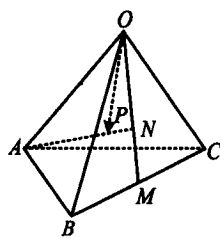


图 4

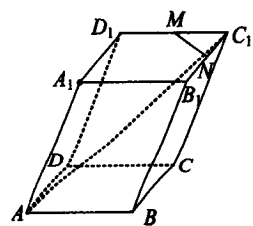


图 5

论证.

例3 如图6, 正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为1, E, F, G 分别为 $C'D', A'D', DD'$ 的中点.

(1) 求证: $EF \parallel AC$;

(2) 求 CE 与 AG 所成角的余弦值.

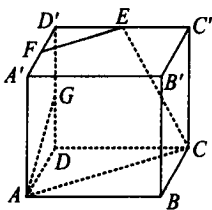


图6

设计意图 本例是利用空间向量基本定理证明两条直线互相平行和计算两条直线所成角的余弦值, 指导学生在证明平行的问题上一般转化为两向量共线的问题, 在问题(1)中, 主要是引导学生利用正方体的结构特征构造正交基底, 并用基向量表示相关的向量, 在问题(2)的求解上, 主要是引导学生用基向量表示向量数量积运算中所涉及的向量, 培养学生转化和化归的数学思想, 提升学生直观想象和逻辑推理的数学核心素养.

5 教学反思, 提高认识

(1) 课堂教学要注重提升学生的数学核心素养

本节的主要内容是空间向量基本定理, 空间向量基本定理是立体几何问题代数化的基础, 有了这个定理, 整个向量空间可以用三个不共面的基向量确定, 空间结构变得简单明了. 在教学中, 应使学生能借助平行六面体理解空间向量的求和与分解, 培养学生的直观想象素养, 能基于基底进行空间向量的线性运算, 培养学生的数学运算素养, 能类比平面向量基本定理并从具体特殊情形抽象概括, 获得空间向量基本定理, 培养学生的数学抽象素养.

(2) 课堂教学要注重培养学生的数学思想方法

本节课在教学活动上, 注重了学生数学思想方法的培养, 借助空间向量基本定理, 将空间直线与直线, 直线与平面等位置关系证明及角度、距离计算等问题转化为空间向量问题, 培养学生化归与转化的数学思想方法; 能理解从平面向量基本定理上升到空间向量基本定理, 能借助已知几何体的结构特征建立向量基底, 从而表示空间中的任意一个向量, 培养学生的特殊到一般和数形结合的思想方法.

(3) 课堂教学要注重突出学生的主体地位

本节课, 在教学方法上, 采用问题驱动, 以学生为主体进行合作交流和探究, 将课堂的主动权真正交给学生, 使学生思维高度运转, 真正让学生成为课堂的主人, 教师只是辅助引导, 通过一些问题的设计及学生的交流探究, 最终达成共识, 从而使学生能深刻理解并掌握本节课的所学内容.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 人民教育出版社. 普通高中数学教科书(选择性必修第一册)A版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2021.
- [3] 人民教育出版社. 普通高中数学教科书(选择性必修第一册)教师教学用书A版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2022.

(收稿日期: 2023-07-28)