# 韦达定理在圆锥曲线非对称问题中的应用

■ 胡贵平

**摘要**：直线与圆锥曲线相交的问题中，通常是利用韦达定理整体代换两交点坐标对称结构的表达式，但是在遇到非对称结构表达式时，如何转化为对称结构，应用韦达定理求解，本文归纳了三种常见类型及转化方法.

**关键词**：韦达定理；圆锥曲线；非对称问题

直线与圆锥曲线相交弦的问题，经常用韦达定理法. 将直线方程代入到曲线方程，消元后得到一个一元二次方程，利用韦达定理得到 $x_1+x_2$ 和 $x_1x_2$ 之间的关系，可以快速处理 $|x_1-x_2|$、$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$、$x_1^2+x_2^2$ 之类的"对称结构"，转化为 $s(x_1+x_2)+tx_1x_2+u$ 韦达定理的形式，但是有的题目把已知条件转化成方程后，会涉及不同系数的方程或代数式，比如求 $x_2=tx_1$、$ax_1+bx_2+c=0$、$\frac{a_1x_1+b_1x_2+c_1x_1x_2+d_1}{a_2x_1+b_2x_2+c_2x_1x_2+d_2}$ 之类的"非对称结构"，并不能完全整理为韦达定理的形式. 那么遇到非对称结构表达式时，如何转化为对称结构，应用韦达定理求解呢？下面归纳了三种常见类型及转化方法，举例说明.

## 一、$x_2=tx_1$ 配凑法

$x_2=tx_1$ 非对称的结构，我们可以通过 $x_2=tx_1$，得 $x_1+x_2=(1+t)x_1$，$x_1x_2=tx_1{}^2$，配凑成 $\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{(1+t)^2}{t}$ 对称结构的形式，应用韦达定理处理.

例 1　已知动点 $M(x,y)$ 到直线 $l:x=4$ 的距离是它到点 $N(1,0)$ 距离的 2 倍.

(1) 求动点 $M$ 的轨迹 $C$ 的方程；

(2) 过点 $P(0,3)$ 的直线 $l$ 与轨迹 $C$ 交于 $A,B$ 两点，若 $A$ 是 $PB$ 的中点，求直线 $l$ 的斜率.

**解**：(1) 动点 $M$ 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过程略.

(2) 当直线 $l$ 的斜率不存在时，$A,B$ 两点为椭圆的上下顶点，显然不符合题意.

当直线 $l$ 的斜率存在时，设方程为 $y=kx+3$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+3,\end{cases}$

消去 $x$，得 $(3+4k^2)x^2+24kx+24=0$，其中 $\Delta=(24k)^2-4\times24(3+4k^2)>0$，即 $k^2>\frac{3}{2}$，所以 $k>\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{6}}{2}$. 设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{24k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{24}{3+4k^2}$，　因为 $A$ 是 $PB$ 的中点，所以 $x_1=\frac{x_2+0}{2}$，即 $x_2=2x_1$，所以 $\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{(1+2)^2}{2}$，即 $\frac{\left(-\frac{24k}{3+4k^2}\right)^2}{\frac{24}{3+4k^2}}=\frac{(1+2)^2}{2}$. 解得 $k^2=\frac{9}{4}$，所以 $k=\frac{3}{2}$ 或 $k=-\frac{3}{2}$. 故直线 $l$ 的斜率为 $k=\pm\frac{3}{2}$.

## 二、$ax_1+bx_2+c=0$ 转化配凑法

$ax_1+bx_2+c=0$ 非对称的结构，我们可以通过变形 $x_2=-\frac{a}{b}x_1-\frac{c}{b}$，类似数列 $a_{n+1}=\lambda a_n+\mu$ 求通项公式方法，进一步变形为 $x_2+\frac{c}{a+b}=-\frac{a}{b}(x_1+\frac{c}{a+b})$，若令 $X_1=(x_1+\frac{c}{a+b})$，$X_2=x_2+\frac{c}{a+b}$，$t=-\frac{a}{b}$，转化为 $X_2=tX_1$，配凑成 $\frac{(X_1+X_2)^2}{X_1X_2}=\frac{(1+t)^2}{t}$ 对称结构的

作者简介：胡贵平（1978－），男，甘肃天水人，本科，中学高级教师，主要从事高中数学教学研究

形式,应用韦达定理处理.

例2[1]　已知抛物线 $C:y^2=4x$,定点 $P(2,1)$,直线 $l$ 与抛物线交于 $A,B$ 两点,且有 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{7}\overrightarrow{PB}$,求直线 $l$ 的斜率.

**解**:设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 $l$ 方程为 $x-2=m(y-1)$,

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x-2=m(y-1), \end{cases}$

消去 $x$,得 $y^2-4my+4m-8=0$.

则 $\begin{cases} y_1+y_2=4m, \\ y_1y_2=4m-8. \end{cases}$

因为 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{7}\overrightarrow{PB}$,所以 $(2-x_1,1-y_1)=\frac{1}{7}(x_2-2,y_2-1)$. 从而有 $y_2=-7y_1+8$. 即 $y_2-1=-7(y_1-1)$.

所以 $\frac{[(y_1-1)+(y_2-1)]^2}{(y_1-1)(y_2-1)}=\frac{(1-7)^2}{-7}$,即 $\frac{[(y_1+y_2)-2]^2}{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}=\frac{36}{-7}$.

所以 $\frac{(4m-2)^2}{4m-8-4m+1}=\frac{36}{-7}$,解得 $m=2$ 或 $m=-1$,所以直线 $l$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ 或 $-1$.

**三、$\frac{a_1x_1+b_1x_2+c_1x_1x_2+d_1}{a_2x_1+b_2x_2+c_2x_1x_2+d_2}$ 和积转换法[2]**

$\frac{a_1x_1+b_1x_2+c_1x_1x_2+d_1}{a_2x_1+b_2x_2+c_2x_1x_2+d_2}$ 非对称的结构,我们可以通过 $x_1+x_2$,$x_1x_2$ 整体关系,得出 $x_1x_2=\lambda(x_1+x_2)+\mu$,和积转换成对称结构的形式,应用韦达定理处理.

例3　已知点 $F$ 为椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点,$A,B$ 分别为其左、右顶点,过 $F$ 作直线 $l$ 与椭圆交于 $M,N$ 两点(不与 $A,B$ 重合),记直线 $AM$ 与 $BN$ 的斜率分别为 $k_1,k_2$,证明 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.

**解**:点 $F(1,0)$,设过点 $F$ 的直线 $l$ 方程为 $x=ty+1$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \\ x=ty+1, \end{cases}$

消去 $x$,得 $(4+3t^2)y^2+6ty-9=0$,因为点 $F$ 在椭圆内,这个方程必有两个实根,设直线 $l$ 与椭圆的交点为点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

则 $\begin{cases} y_1+y_2=-\frac{6t}{4+3t^2}, \\ y_1y_2=-\frac{9}{4+3t^2}. \end{cases}$

由椭圆方程可知 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,因此 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}$,$k_2=\frac{y_2}{x_2-2}$,

从而 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{y_1(ty_2-1)}{y_2(ty_1+3)}=\frac{ty_1y_2-y_1}{ty_1y_2+3y_2}$

由韦达定理和积转换,可得 $ty_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$,所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{ty_1y_2-y_1}{ty_1y_2+3y_2}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}$,

所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3}$,为定值.

$\frac{a_1x_1+b_1x_2+c_1x_1x_2+d_1}{a_2x_1+b_2x_2+c_2x_1x_2+d_2}$ 半代换配凑法

我们可以通过只代换 $x_1x_2$,对 $x_1,x_2$ 其中某个进行配凑,把变量集中,使其能构成比例形式.

**另解**:$\frac{k_1}{k_2}=\frac{ty_1y_2-y_1}{ty_1y_2+3y_2}=\frac{-\frac{9t}{4+3t^2}-y_1}{-\frac{9t}{4+3t^2}+3y_2}=\frac{-\frac{9t}{4+3t^2}-\left(-\frac{6t}{4+3t^2}-y_2\right)}{-\frac{9t}{4+3t^2}+3y_2}=\frac{-\frac{3t}{4+3t^2}+y_2}{-\frac{9t}{4+3t^2}+3y_2}=\frac{1}{3}$,为定值.

(下转第25页)

设 $t=\sin\frac{\partial}{2}$,则 $0<t<1$, $V_{\text{四边形ABCD}}=\frac{8}{3}(t-t^3)$.

设 $f(t)=\frac{8}{3}(t-t^3)$,则 $f'(t)=\frac{8}{3}(1-3t^2)$, $0<t<1$.

所以当 $0<t<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f'(t)>0$, $f(t)$ 单调递增;

当 $\frac{\sqrt{3}}{3}<t<1$ 时, $f'(t)<0$, $f(t)$ 单调递减. 所以当 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(t)$ 取得最大值 $\frac{16\sqrt{3}}{27}$.

所以四面体 $ABCD'$ 体积的最大值为 $\frac{16\sqrt{3}}{27}$.

动态的变化引起的最值问题,应找出问题中的动态变量关系式,建立目标函数,在目标函数建成后,可用一次函数的端点法,二次函数的配方法、公式法,函数有界法(如三角函数等),对勾函数或基本不等式,及函数的拐点导数法等求目标函数的最值,进而解决几何最值(范围)问题[2].

**参考文献:**

[1] 吕二动. 活跃在竞赛试题中的三角函数最值问题[J]. 数理化学习:高中版,2022(06):39 - 40.

[福建省宁化第一中学(365400)]

---

(上接第20页)

以上两种方法是解决此类问题的通法,当然本题还可以利用圆锥曲线方程代入法, $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}$,则 $(\frac{k_1}{k_2})^2=\frac{y_1^2(x_2-2)^2}{y_2^2(x_1+2)^2}$,因为 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$,所以 $y_1^2=3(1-\frac{x_1^2}{4})$,同理有 $y_2^2=3(1-\frac{x_2^2}{4})$. 所以 $(\frac{k_1}{k_2})^2=\frac{3(1-\frac{x_1^2}{4})(x_2-2)^2}{3(1-\frac{x_2^2}{4})(x_1+2)^2}=\frac{(2-x_1)(2-x_2)}{(2+x_2)(2+x_1)}=\frac{4-2(x_1+x_2)+x_1x_2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}$. 联立直线与椭圆的方程,消去 $y$,应用韦达定理处理.

直线与圆锥曲线综合问题中,不仅要强化理解几何问题代数化的思路方法,而且要重视运算过程的分析指导,揭示算法背后的算理,探索减少运算的技巧,这样才能真正地提升数学运算核心素养.

**参考文献:**

[1] 田鹏. 例谈解析几何中非对称结构问题的处理策略[J]. 中学数学教学参考,2021(8).

[2] 卢会玉. 非韦达对称问题解题策略研究[J]. 数理化学习:高中版,2021(9).

[甘肃省白银市第一中学 (730900)]