2023 年新高考数学Ⅰ卷亮点试题评析

山东省泰安长城中学　271000　王　兵

【摘　要】 2023 年新高考数学Ⅰ卷试题命制情境新颖,设问、表述清新、简约,是一份深受好评的数学试卷.经过对 2023 年新高考数学Ⅰ卷中出现的一些亮点试题的认真研究,从中看出新高考数学Ⅰ卷促进学生提高学科素养的命题导向引领高考备考.

【关键词】 2023 年;新高考Ⅰ卷;亮点试题;评析

2023 年新高考数学 Ⅰ 卷落实基础性与综合性的考查要求,聚焦数学核心素养,精选试题情境,出现了一些表述简洁、背景鲜活、情境新颖的亮点试题.下面就这些亮点试题进行评析,供参考.

1　单选亮点题

例 1　(第 4 题) 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减,则 a 的取值范围是(　　).

A.$(-\infty,-2]$　　B.$[-2,0)$

C.$(0,2]$　　D.$[2,+\infty)$

分析　由指数型复合函数单调性,根据“同增异减”规律,转化为二次函数的单调性列式计算作答.

解　因为函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,而函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减,则函数 $y=x(x-a)=x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减,所以 $\frac{a}{2}\geqslant 1$,解得 $a\geqslant 2$,所以 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

故选 D.

评析　试题落实高考命题“基础性”和“全面性”考查要求,考查考生对基础知识和基本方法的深刻理解和融会贯通的应用.将复合函数的单调性转化为二次函数的单调性,考查化归转化思想的运用.试题亮点在于巧妙地用单调性考查了二次函数的知识.

例 2　(第 7 题) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,设甲:$\{a_n\}$ 为等差数列;乙:$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列,则(　　).

A.甲是乙的充分条件但不是必要条件

B.甲是乙的必要条件但不是充分条件

C.甲是乙的充要条件

D.甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

分析　根据充分条件、必要条件的定义及等差数列的定义,并结合等差数列前 n 项和公式以及数列前 n 项和与第 n 项的关系作出推理判断.

解　首先判断充分性.

因为甲:$\{a_n\}$ 为等差数列,设其公差为 d,所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,所以 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$,所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\left(a_1+\frac{n}{2}d\right)-\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right)=\frac{1}{2}d$,由数列定义知 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列,则甲是乙的充分条件,充分性成立.

再来判断必要性.

因为乙:$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列,由等差数列定义知 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}$ 为常数,设为 d'(常数),所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{S_1}{1}+(n-1)d'=S_1+(n-1)d'$,所以 $S_n=nS_1+n(n-1)d'$.

于是,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=nS_1+n(n-1)d'-(n-1)S_1-(n-1)(n-2)d'=S_1+2(n-1)d'$,所以 $a_n-a_{n-1}=S_1+2(n-1)d'-S_1-2(n-2)d'=2d'$ 为常数,所以 $\{a_n\}$ 为等差数列,则甲是乙的必要条件,必要性成立.

故选 C.

评析　试题以等差数列有关知识的应用为情境,考查充要条件的推理论证,要求考生判断充分性和必要性,然后分别进行证明,解决问题的关键是利用等差数列的概念和特点进行推理论证,彰显了对数学运算、逻辑推理等核心素养的考查.试题亮点在于以等差数列情境考查充要条件的推理论证.

2　多选亮点题

例 3　(第 9 题) 有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$,其中 x_1 是最小值,x_6 是最大值,则(　　).

A.x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平

均数

B.x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数

C.x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不小于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差

D.x_2,x_3,x_4,x_5 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的极差

分析 依据题意,应用平均数、中位数、标准差及极差等数字特征的概念逐项分析作出判断.

解 对于A,如设2,2,2,2的平均数为2;1,2,2,2,2,9的平均数为3,故A错误.

对于B,不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5\leqslant x_6$,可知 x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数均为$\dfrac{x_3+x_4}{2}$,故B正确.

对于C,因为 x_1 是最小值,x_6 是最大值,则 x_2,x_3,x_4,x_5 的波动性不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的波动性,即 x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差,故C错误.

对于D,不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5\leqslant x_6$,则 $x_6-x_1\geqslant x_5-x_2$,当且仅当 $x_1=x_2,x_5=x_6$ 时,等号成立,故D正确.

综上,选BD.

评析 试题考查统计抽样中样本的基本数字特征,考查考生对样本平均数、样本标准差、样本中位数、样本极差概念的理解和掌握,不仅注重试题的基础性,而且对基础知识和基本能力的考查有机结合.试题亮点是:以清新的设问情境,很好地考查了统计中的平均数、中位数、方差、极差等数字特征的理解和知识应用.

例4 (第10题)噪声污染问题越来越受到重视.用声压级来度量声音的强弱,定义声压级 $L_p=20\times\lg\dfrac{p}{p_0}$,其中常数 $p_0(p_0>0)$ 是听觉下限阈值,p 是实际声压.下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离 /m	声压级 /dB
燃油汽车	10	60 ~ 90
混合动力汽车	10	50 ~ 60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车10 m处测得实际声压分别为 p_1,p_2,p_3,则( ).

A.$p_1\geqslant p_2$　　B.$p_2>10p_3$

C.$p_3=100p_0$　　D.$p_1\leqslant 100p_2$

分析 根据题意可知 $L_{p_1}\in[60,90]$,$L_{p_2}\in[50,60]$,$L_{p_3}=40$,结合对数运算逐项分析判断.

解 根据题意可知:$L_{p_1}\in[60,90]$,$L_{p_2}\in[50,60]$,$L_{p_3}=40$.

对于A,$L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\dfrac{p_1}{p_0}-20\times\lg\dfrac{p_2}{p_0}=20\times\lg\left(\dfrac{p_1}{p_0}\times\dfrac{p_0}{p_2}\right)=20\times\lg\dfrac{p_1}{p_2}$.

由 $L_{p_1}\geqslant L_{p_2}$,得 $L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\dfrac{p_1}{p_2}\geqslant 0$,$\lg\dfrac{p_1}{p_2}\geqslant 0$,即$\dfrac{p_1}{p_2}\geqslant 1$ 且 $p_1,p_2>0$,所以 $p_1\geqslant p_2$.A正确.

对于B,$L_{p_2}-L_{p_3}=20\times\lg\dfrac{p_2}{p_0}-20\times\lg\dfrac{p_3}{p_0}=20\times\lg\left(\dfrac{p_2}{p_0}\times\dfrac{p_0}{p_3}\right)=20\times\lg\dfrac{p_2}{p_3}$.

由于 $L_{p_2}-L_{p_3}=L_{p_2}-40\geqslant 10$,因此 $20\times\lg\dfrac{p_2}{p_3}\geqslant 10$,$\lg\dfrac{p_2}{p_3}\geqslant\dfrac{1}{2}$,即$\dfrac{p_2}{p_3}\geqslant\sqrt{10}$ 且 $p_2,p_3>0$,所以得 $p_2\geqslant\sqrt{10}p_3$,当且仅当 $L_{p_2}=50$ 时,取到等号.B错误.

对于C,由于 $L_{p_3}=20\times\lg\dfrac{p_3}{p_0}=40$,$\lg\dfrac{p_3}{p_0}=2$,所以$\dfrac{p_3}{p_0}=100$,所以 $p_3=100p_0$. C正确.

对于D,根据A可知 $L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\dfrac{p_1}{p_2}$,且 $L_{p_1}-L_{p_2}\leqslant 90-50=40$,因此得 $20\times\lg\dfrac{p_1}{p_2}\leqslant 40$,所以 $\lg\dfrac{p_1}{p_2}\leqslant 2$,即$\dfrac{p_1}{p_2}\leqslant 100$,且 $p_1,p_2>0$,所以 $p_1\leqslant 100p_2$. D正确.

综上,选ACD.

评析 试题利用对数知识研究噪声声压水平,经过对声压级的研究,考查了对数及运算性质的应用,很好地考查考生对问题的理解和应用能力.表面上看试题题干精炼,但计算量较大,审题和计算都需要认真、仔细,稍有不慎,就会导致误解题意而耗费时间.试题亮点:源于人教A版《普通高中教科书.数学必修第一册》(2019版)第141页习题4.4第10题的"声强"问题,体现高考命题源于教材的原则.

例5 (第12题)下列物体,能够被整体放入棱长为1(单位:m)的正方体容器(容器壁厚度忽略不计)内的有( ).

A.直径为0.99 m的球体

B.所有棱长均为 1.4 m 的四面体

C.底面直径为 0.01 m,高为 1.8 m 的圆柱体

D.底面直径为 1.2 m,高为 0.01 m 的圆柱体

分析　根据题意结合正方体的性质逐项分析判断.对于 C、D,以正方体的体对角线为圆柱体的轴,结合正方体以及圆柱体的性质分析判断.

解　对于 A,棱长为 1(单位:m)的正方体内切球的直径为 1m. A 正确.

对于 B,如图 1,棱长为 1(单位:m)的正方体内部最大的正四面体棱长为 $BA_1 = \sqrt{2} > 1.4$.B 正确.

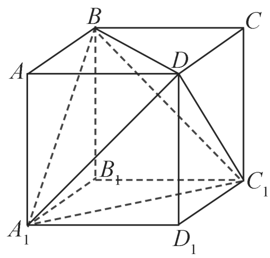

图 1

对于 C,由于圆柱体的底面直径为 0.01 m,可忽略不计.可将圆柱体看作高为 1.8 m 的线段,而棱长为 1(单位:m)的正方体的体对角线为$\sqrt{3} < 1.8$. C 错误.

对于 D,如图 2,由于圆柱体的高为 0.01 m,可忽略不计.可将圆柱体看作直径为 1.2 m 的平面图形. E,F,G,H,I,J 为各棱中点,$EFGHIJ$ 为正六边形,其棱长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$ m,其内切圆直径为 FH(如图 3). 所以 $\angle GFH = \angle GHF = 30°, FH = \sqrt{3}FG = \sqrt{3}GH = \frac{\sqrt{6}}{2}$ m.

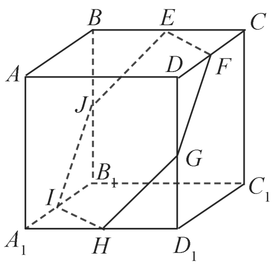

图 2

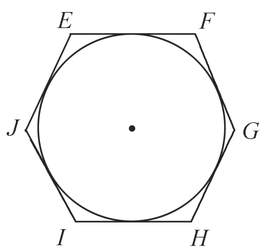

图 3

由于$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} > (1.2)^2 = 1.44$. D 正确.

综上,选 ABD.

评析　试题以正方体模型为载体,考查空间几何体的切、接问题,及由空间向平面的转化,考查推理论证能力,彰显直观想象、数学建模等数学核心素养,对综合应用能力和思维能力要求较高. 试题亮点:试题在正方体内放入其它几何体,打破了常规的思维定势,而且试题用数量关系来刻画空间中的位置关系,是一种新颖的创新表达形式.

3　解答亮点题

例 6　(第 19 题) 已知函数$f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论$f(x)$的单调性;

(2) 证明:当 $a > 0$ 时,$f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

分析　(1) 先求导,再分类讨论 $a \leqslant 0$ 与 $a > 0$ 两种情况,结合导数与函数单调性的关系即可得解;

(2) 构造函数 $h(x) = e^x - x - 1$,证得 $e^x \geqslant x + 1$,从而得到$f(x) \geqslant x + \ln a + 1 + a^2 - x$,进而将问题转化为 $a^2 - \frac{1}{2} - \ln a > 0$ 的恒成立问题,由此得证.

解　(1) 函数$f(x) = a(e^x + a) - x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x) = ae^x - 1$.

当 $a \leqslant 0$ 时,由 $e^x > 0$,可知 $ae^x \leqslant 0$,所以$f'(x) = ae^x - 1 < 0$ 恒成立,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时,令$f'(x) = ae^x - 1 = 0$,解得 $x = -\ln a$.

若 $x < -\ln a$,则$f'(x) < 0$,所以 $f(x)$ 在$(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减;

若 $x > -\ln a$,则$f'(x) > 0$,所以 $f(x)$ 在$(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

综上可知,当 $a \leqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;当 $a > 0$ 时,$f(x)$ 在$(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减,$f(x)$ 在$(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 令 $g(x) = e^x - x - 1$,则 $g'(x) = e^x - 1$,

由 $y = e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,可知 $g'(x) = e^x - 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又 $g'(0) = e^0 - 1 = 0$,所以当 $x < 0$ 时,$g'(x) < 0$;当 $x > 0$ 时,$g'(x) > 0$;

所以 $g(x)$ 在$(-\infty, 0)$ 上单调递减,在$(0, +\infty)$ 上单调递增,故 $g(x) \geqslant g(0) = 0$,则 $e^x \geqslant x + 1$,当且仅当 $x = 0$ 时,取到等号.

因为$f(x) = a(e^x + a) - x = ae^x + a^2 - x = e^{x+\ln a} + a^2 - x \geqslant x + \ln a + 1 + a^2 - x$,

当且仅当 $x + \ln a = 0$,$x = -\ln a$ 时,取到等号.

于是,要证$f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$,只要证 $x + \ln a + 1 + a^2 - x > 2\ln a + \frac{3}{2}$,即证 $a^2 - \frac{1}{2} - \ln a > 0$.

令 $\varphi(a) = a^2 - \frac{1}{2} - \ln a (a > 0)$,则 $\varphi'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$.

令 $\varphi'(a) < 0$,则 $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$;令 $\varphi'(a) > 0$,则 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此 $\varphi(a)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增,所以 $\varphi(a)_{\min} = \varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$,从而有 $\varphi(a)>0$ 恒成立.

故当 $a>0$ 时,$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$ 恒成立.证毕.

评析　试题以基本函数 e^x 为背景命题,第(1)小题考查应用导数讨论函数的单调性;第(2)小题将不等式证明问题,通过构造函数,转化为不等式恒成立问题来解答.试题最大亮点在于打破了人们将导数应用的大题作为整个试卷"压轴题"的惯性认知,而是以"中档题"放置在第 19 题的位置,这既是整份试卷的最大变化,也是命题者"反刷题""反押题"的独具匠心,对今后高考复习备考有着积极的导向作用.

例 7　(第 21 题)甲乙两人投篮,每次由其中一人投篮,规则如下:若命中则此人继续投篮,若未命中则换为对方投篮.无论之前投篮情况如何,甲每次投篮的命中率均为 0.6,乙每次投篮的命中率均为 0.8.由抽签确定第 1 次投篮的人选,第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1)求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2)求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3)已知:若随机变量 x_i 服从两点分布,且 $P(x_i=1)=1-P(x_i=0)=q_i,i=1,2,\cdots,n$,则 $E(\sum_{i=1}^{n}x_i)=\sum_{i=1}^{n}q_i$.记前 n 次(即从第 1 次到第 n 次投篮)中甲投篮的次数为 Y,求 $E(Y)$.

分析　(1)根据全概率公式即可求出;

(2)设 $P(a_i)=p_i$,由题意可得 $p_{i+1}=0.4p_i+0.2$,根据数列知识,构造等比数列即可解出;

(3)先求出两点分布的期望,再根据题中的结论以及等比数列的求和公式即可求出.

解　(1)记"第 i 次投篮的人是甲"为事件 A_i,"第 i 次投篮的人是乙"为事件 B_i,则 $P(B_2)=P(A_1B_2)+P(B_1B_2)=P(A_1)P(B_2\mid A_1)+P(B_1)P(B_2\mid B_1)=0.5\times(1-0.6)+0.5\times0.8=0.6$.

所以第 2 次投篮的人是乙的概率为 0.6.

(2)设 $P(A_i)=p_i$,则根据题意可知 $P(B_i)=1-p_i$,所以 $P(A_{i+1})=P(A_iA_{i+1})+P(B_iA_{i+1})=P(A_i)P(A_{i+1}\mid A_i)+P(B_i)P(A_{i+1}\mid B_i)$,即 $p_{i+1}=0.6p_i+(1-0.8)\times(1-p_i)=0.4p_i+0.2$,从而得

$$p_i=0.4p_{i-1}+0.2. \quad ①$$

令 $p_i+t=0.4(p_{i-1}+t)$,所以

$$p_i=0.4p_{i-1}-0.6t. \quad ②$$

故由①②,可得 $-0.6t=0.2$,解得 $t=-\frac{1}{3}$,所以 $p_i-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(p_{i-1}-\frac{1}{3}\right)$.

由 $p_1=0.5=\frac{1}{2}$,得 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

所以 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$、公比为 $\frac{2}{5}$ 的等比数列,所以 $p_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$,即 $p_n=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$.

故第 i 次投篮的人是甲的概率为 $p_i=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$.

(3)因为 $p_i=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3},i=1,2,\cdots,n$.

所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$E(Y)=p_1+p_2+\cdots+p_n=\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}+\frac{n}{3}=\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]+\frac{n}{3}$,

故 $E(Y)=\frac{5}{18}\cdot\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]+\frac{n}{3}$.

评析　试题是概率与递推数列融合、渗透的问题,第(1)小题考查了全概率公式的应用,第(2)(3)小题关键是由题意求得递推公式,然后根据等比数列的基本知识求解.对于这类问题,若直接求概率困难较大,而由问题特点建立关于概率的递推数列模型,利用递推的方法,再结合数列知识转化为求解数列通项公式及数列求和,可使问题得以顺利解决.试题亮点是:在概率中"隐藏"了等比数列的通项公式、求和公式等知识点,将概率与递推数列结合在一起考查.其实,这种命题方式在 2019 年全国Ⅰ卷理科的第 21 题就曾出现过,而且新教材《普通高中教科书·A 版数学选择性必修第三册》(2019 年版)第 91 页复习参考题 7 中的第 10 题(三人传球训练)是这类问题的教材原型.试题将递推数列与随机变量的概率分布及数学期望有机融合,则是一种全新的考法.

例 8　(第 22 题)在直角坐标系 xOy 中,点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的距离,记动点 P 的轨迹为 W.

(1)求 W 的轨迹方程;

(2)已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上,证明:矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

分析　(1)设 $P(x,y)$,根据题意列出方程 x^2+

$\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=y^2$,化简即可;

(2) 设直线AB的方程为$y=k(x-a)+a^2+\dfrac{1}{4}$,将其与抛物线方程联立,再利用弦长公式和放缩法得$|AB|+|AD|\geqslant\sqrt{\dfrac{(1+k^2)^3}{k^2}}$,利用换元法和求导即可求出周长最值,再排除边界值即可.

解　(1) 设点$P(x,y)$,则由题意得$|y|=\sqrt{x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2}$,化简、整理得$y=x^2+\dfrac{1}{4}$.

所以W的轨迹方程为$y=x^2+\dfrac{1}{4}$.

(2) 不妨设A,B,D三点在W上,且$BA\perp DA$.

设$A\left(a,a^2+\dfrac{1}{4}\right)$,直线$BA,DA$的斜率分别为$k$,$-\dfrac{1}{k}$,根据对称性不妨设$|k|\leqslant 1$.

由$\begin{cases}y=x^2+\dfrac{1}{4},\\ y=k(x-a)+a^2+\dfrac{1}{4},\end{cases}$消去$y$整理得$x^2-kx+ka-a^2=0$.

由一元二次方程的根与系数的关系,得$x_A+x_B=k$,所以$B(k-a,(k-a)^2+\dfrac{1}{4})$,所以

$|AB|=\sqrt{(k-2a)^2+\left[(k-a)^2+\dfrac{1}{4}-a^2-\dfrac{1}{4}\right]^2}=\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|$.

同理得$|AD|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot\left|-\dfrac{1}{k}-2a\right|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|$.

所以$|AB|+|AD|=\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|+\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\geqslant$

$\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\right)\geqslant$

$\sqrt{1+k^2}\left|(k-2a)+\left(\dfrac{1}{k}+2a\right)\right|=$

$\sqrt{1+k^2}\left|k+\dfrac{1}{k}\right|=\sqrt{\dfrac{(1+k^2)^3}{k^2}}$.

令$\varphi(t)=\dfrac{(1+t)^3}{t}=t^2+3t+\dfrac{1}{t}+3$,其中$k^2=t$,$t\in(0,1)$,则$\varphi'(t)=2t+3-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{(2t-1)(t+1)^2}{t^2}$.

当$0<t<\dfrac{1}{2}$时,$\varphi'(t)<0$;当$\dfrac{1}{2}<t<1$时,$\varphi'(t)>0$,所以$\varphi(t)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$上单调递增,从而当$t=\dfrac{1}{2}$时,$\varphi(t)$在$(0,1)$上取得最小值为$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$,所以$|AB|+|AD|\geqslant\sqrt{\varphi(t)}\geqslant\sqrt{\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)}=\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

由于两处取得等号的条件不一致,于是$2(|AB|+|AD|)>3\sqrt{3}$.

故矩形$ABCD$的周长大于$3\sqrt{3}$.得证.

评析　试题考查了轨迹方程的求法,直线与曲线的位置关系,用导数研究函数单调性、最值等知识的应用,落实了高考“综合性”的考查要求.虽然试题是常见的命题形式,但其亮点比较突出:一是以往的圆锥曲线方程都是标准方程,而试题中的方程却是顶点不在原点的抛物线方程,它以二次函数的形式呈现;二是解析几何问题中渗透导数知识的运用,提升了试题的“综合”层次;三是在求解最值的过程中用到了“三角不等式[1]”这样一个“不怎么考”的知识点,这也启示我们只有把基础知识全面、扎实地掌握了,才能在考试中从容应对.

参考文献

[1]　鲁贤龙,朱小扣.聚焦在解题中的三角不等式[J].中学数学杂志,2022(11):28-30.

作者简介　王兵(1981—),男,汉族,山东泰安人,中学数学高级教师;荣获泰山名班主任、泰安市优秀班主任、市直优秀教师、泰安市课程与教学工作模范班主任、泰安市课程与教学工作先进个人、泰山英才班主任、泰山教学新星、泰安市学科教学能力大赛二等奖、市直创新课一等奖、全国骨干班主任培训优秀学员等荣誉;主要从事高中数学教学及研究工作;表教学论文 10 余篇,主持市级课题 1 项,参与市级课题 2 项.