函数因导数而精彩

——运用导数解决复合函数问题研究

安徽亳州市蒙城县第二中学(233500) 陈 虹

[摘 要]导数是研究和解决函数问题的重要工具,也是衔接高中数学和大学数学的桥梁。函数与导数相结合,运用导数处理函数问题,是近几年高考的热点。文章研究这些热点题型的解法,旨在提高学生的解题能力。

[关键词]导数;复合函数;函数不等式

[中图分类号] G633.6 [文献标识码] A [文章编号] 1674-6058(2023)08-0029-03

近几年的全国高考数学试题和各地的数学模拟试题中,导数所占的比重在不断地提高。高考数学试题的命题,往往将函数与导数结合在一起考查,命题形式呈现出多样化和新颖性,很多时候要求学生利用导数巧妙求解复合函数问题。本文结合典型例题,探究如何巧妙、合理、恰当地运用导数解决复合函数问题。

一、巧妙运用导数的几何意义解决复合函数问题

(一)典型例题

[例1]函数$f(x)=x^4-2x^3$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为( )。

A. $y=-2x-1$ B. $y=-2x+1$

C. $y=2x-3$ D. $y=2x+1$

解析:因为$f(x)=x^4-2x^3$,所以$f'(x)=4x^3-6x^2$,所以$f(1)=-1$,$f'(1)=-2$。因此,所求切线的方程为$y+1=-2(x-1)$,即$y=-2x+1$。故选B。

[变式]设曲线$y=x^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$在点$(1,1)$处的切线与$x$轴的交点的横坐标为$x_n$,则$x_1x_2\cdots x_n$等于( )。

A. $\frac{1}{n}$ B. $\frac{1}{n+1}$ C. $\frac{n}{n+1}$ D.1

解析:对$y=x^{n+1}$求导得$y'=(n+1)x^n$,令$x=1$得在点$(1,1)$处的切线的斜率$k=n+1$,在点$(1,1)$处的切线方程为$y-1=(n+1)(x-1)$,令$y=0$,得$x_n=\frac{n}{n+1}$,则$x_1x_2\cdots x_n=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$。故选B。

[例2]过曲线$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$的点$P(2,4)$的切线方程为________________。

解析:设曲线$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$与过点$P(2,4)$的切线相切于点$A\left(x_0,\frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3}\right)$,则切线的斜率$k=y'|_{x=x_0}=x_0^2$,所以切线方程为$y-\left(\frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3}\right)=x_0^2(x-x_0)$,即$y=x_0^2\cdot x-\frac{2}{3}x_0^3+\frac{4}{3}$。因为点$P(2,4)$在切线上,所以$4=2x_0^2-\frac{2}{3}x_0^3+\frac{4}{3}$,即$x_0^3-3x_0^2+4=0$,所以$x_0^3+x_0^2-4x_0^2+4=0$,所以$x_0^2(x_0+1)-4(x_0+1)(x_0-1)=0$,所以$(x_0+1)(x_0-2)^2=0$,解得$x_0=-1$或$x_0=2$,代入$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。故所求的切线方程为$4x-y-4=0$或$x-y+2=0$。

(二)解题技巧

(1)求曲线$y=f(x)$在$x=x_0$处的切线。确定切点坐标$(x_0,f(x_0))$,求出斜率$f'(x_0)$,则切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。

(2)求曲线$y=f(x)$过点$P(x_0,y_0)$的切线。设切点坐标为$Q(x_1,f(x_1))$,利用$f'(x_1)=k_{PQ}$,即$f'(x_1)=\frac{f(x_1)-y_0}{x_1-x_0}$,解方程求得$x_1$,得到切点坐标及$f'(x_1)$,则可得切线方程$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$。(点$P$可能不在曲线上,或在曲线上但不一定为切点。因此,此问题的答案可能有多种)

(3)曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为$y=kx+b\Rightarrow f(x_0)=kx_0+b$且$f'(x_0)=k$。

(三)真题再现

题目:(2021年新高考Ⅰ卷第7题)若过点(a,b)可以作曲线$y=e^x$的两条切线,则( )。

A. $e^b<a$ B. $e^a<b$

C. $0<a<e^b$ D. $0<b<e^a$

解析:在曲线$y=e^x$上任取一点$P(t,e^t)$,对函数

$y=e^x$求导得$y'=e^x$，所以曲线$y=e^x$在点P处的切线方程为$y-e^t=e^t(x-t)$，即$y=e^tx+(1-t)e^t$，由题意可知，点(a,b)在直线$y=e^tx+(1-t)e^t$上，可得$b=ae^t+(1-t)e^t=(a+1-t)e^t$，令$f(t)=(a+1-t)e^t$，则$f'(t)=(a-t)e^t$。当$t<a$时，$f'(t)>0$，此时函数$f(t)$单调递增；当$t>a$时，$f'(t)<0$，此时函数$f(t)$单调递减，所以$f(t)_{\max}=f(a)=e^a$，由题意可知，直线$y=b$与曲线$y=f(t)$的图象有两个交点，则$b<f(t)_{\max}=e^a$。当$t<a+1$时，$f(t)>0$；当$t>a+1$时，$f(t)<0$，作出函数$f(t)$的图象如图1所示。

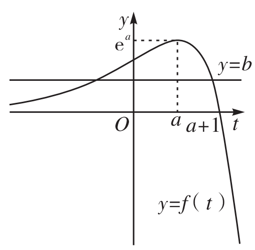

图1

由图可知，当$0<b<e^a$时，直线$y=b$与曲线$y=f(t)$的图象有两个交点，故选D。

二、运用导数求解复合函数的参数

（一）典型例题

［例3］已知函数$f(x)=a\ln x-ax+1$，$a\in\mathbf{R}$。设$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-1$，若函数$g(x)$在区间$\left[\frac{3}{2},4\right]$上为严格递减函数，求实数$a$的取值范围。

解析：由$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-1$得$g'(x)=\frac{a}{x}+x-a$，依题意$g'(x)=\frac{a}{x}+x-a\leqslant 0$对区间$\left[\frac{3}{2},4\right]$上的任意实数恒成立，

即$a\geqslant(x-1)+\frac{1}{x-1}+2$对区间$\left[\frac{3}{2},4\right]$上的任意实数恒成立，

易得$y=(x-1)+\frac{1}{x-1}+2$在区间$\left(\frac{3}{2},2\right)$上单调递减，在$(2,4)$上单调递增，$y\big|_{x=4}=\frac{16}{3}$，$y\big|_{x=\frac{3}{2}}=\frac{9}{2}$，所以$y=(x-1)+\frac{1}{x-1}+2$在$\left[\frac{3}{2},4\right]$上的最大值为$\frac{16}{3}$，所以实数$a$的取值范围为$\left[\frac{16}{3},+\infty\right)$。

（二）解题技巧

导函数中常用的两种转化思想：一是运用导数探究含参函数的单调性，转化为不等式恒成立的问题，注重分类讨论思想与数形结合思想的运用；二是利用函数的零点、不等式证明等转化为函数的单调性和极（最）值问题处理。

（三）真题再现

题目：（2020年全国新高考Ⅰ卷第21题）已知函数$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$。

（1）当$a=e$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若$f(x)\geqslant 1$，求a的取值范围。

解析：（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$。

当$a=e$时，$f(x)=e^x-\ln x+1$，$f'(1)=e-1$，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-(e+1)=(e-1)(x-1)$，即$y=(e-1)x+2$。

直线$y=(e-1)x+2$在x轴和y轴上的截距分别为$\frac{-2}{e-1}$和2，

因此所求三角形的面积为$\frac{2}{e-1}$。

（2）当$0<a<1$时，$f(1)=a+\ln a<1$。

当$a=1$时，$f(x)=e^{x-1}-\ln x$，$f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$；当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$。因此，当$x=1$时，$f(x)$取得最小值，最小值为$f_{\min}(1)=1$，从而$f(x)\geqslant 1$。

当$a>1$时，$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant e^{x-1}-\ln x\geqslant 1$。

综上，a的取值范围是$[1,+\infty)$。

（四）考点分析

求最值时，要注意极值点和区间的关系，关系不能确定时，要进行分类讨论，不能简单地认为极值就是最值。函数的最值是一个“整体”概念，但是函数的极值是一个“局部”概念，要注意极大值和极小值之间没有必然的大小关系。

三、运用导数证明复合函数不等式

（一）典型例题

［例4］已知$f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+a\ln x$。

（1）若函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，求实数a的取值范围；

（2）若函数$f(x)$有两个极值点x_1、x_2，证明：$f(x_1)+f(x_2)>-10+\ln a$。

解析：（1）函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+a\ln x$定义域为$(0,+\infty)$，依题意，$\forall x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=x-4+\frac{a}{x}\geqslant 0$成立，即$\forall x\in(0,+\infty)$，$a\geqslant -x^2+4x$成立，而当$x=2$时，$(-x^2+4x)_{\max}=4$，因此$a\geqslant 4$，

而$a=4$时，$f(x)$不是常数函数，于是得$a\geqslant 4$，

所以实数a的取值范围是$a\geqslant 4$。

(2)由(1)知$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=x-4+\frac{a}{x}=\frac{x^2-4x+a}{x}$，因$f(x)$有两个极值点$x_1$、$x_2$，则$f'(x)=0$，即$x^2-4x+a=0$有两个不等正根，

于是得$\begin{cases}\Delta=16-4a>0,\\x_1x_2=a>0,\\x_1+x_2=4,\end{cases}$

有$0<a<4$，

$f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+a(\ln x_1+\ln x_2)$

$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2-x_1x_2-4(x_1+x_2)+a\ln x_1x_2$

$=a\ln a-a-8$，

$f(x_1)+f(x_2)-(-10+\ln a)=(a-1)\ln a-a+2$，令$g(a)=(a-1)\ln a-a+2$，$0<a<4$，$g'(a)=\ln a-\frac{1}{a}$，显然函数$g'(a)$在$(0,4)$上单调递增，而$g'(1)=-1<0$，$g'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$，

因此$\exists a_0\in(1,2)$，使得$g'(a_0)=0$，即$\ln a_0=\frac{1}{a_0}$，当$0<a<a_0$时，$g'(a)<0$；当$a_0<a<4$时，$g'(a)>0$。

于是得$g(a)$在$(0,a_0)$上单调递减，在$(a_0,4)$上单调递增，$g(a)\geqslant g(a_0)=(a_0-1)\ln a_0-a_0+2=(a_0-1)\cdot\frac{1}{a_0}-a_0+2=3-\left(\frac{1}{a_0}+a_0\right)$。

显然$y=\frac{1}{a_0}+a_0$在$(1,2)$上单调递增，则$2<\frac{1}{a_0}+a_0<\frac{5}{2}$，因此$\frac{1}{2}<3-\left(\frac{1}{a_0}+a_0\right)<1$，即有$g(a)>0$，所以$f(x_1)+f(x_2)>-10+\ln a$。

(二)解题技巧

函数不等式证明问题，将所证不等式进行等价转化，构造出新函数，再利用函数的单调性、极(最)值问题处理。本题的关键点在于转化成新函数的最值问题后，需要通过隐零点代换，进而求出函数的最值，使问题得到解决。

(三)真题再现

题目：(2019年高考北京卷理科数学第19题)已知函数$f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$。

(Ⅰ)求曲线$y=f(x)$的斜率为1的切线方程；

(Ⅱ)当$x\in[-2,4]$时，求证：$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

(Ⅲ)设$F(x)=\left|f(x)-(x+a)\right|(a\in\mathbf{R})$，记$F(x)$在区间$[-2,4]$上的最大值为$M(a)$，当$M(a)$最小时，求$a$的值。

解析：(Ⅰ)由$f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$，得$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$，令$f'(x)=1$，即$\frac{3}{4}x^2-2x+1=1$，解得$x_1=0$或$x_2=\frac{8}{3}$。

又$f(0)=0$，$f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{27}$，所以曲线$y=f(x)$的斜率为1的切线方程是$y=x$与$y-\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$，即$y=x$与$y=x-\frac{64}{27}$。

(Ⅱ)令$g(x)=f(x)-x$，$x\in[-2,4]$，

由$g(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2$得$g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x$。

令$g'(x)=0$得$x_1=0$或$x_2=\frac{8}{3}$。

$g'(x)$和$g(x)$随x的变化情况如下表所示。

x	-2	$(-2,0)$	0	$\left(0,\frac{8}{3}\right)$	$\frac{8}{3}$	$\left(\frac{8}{3},4\right)$	4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以$g(x)$的最小值为-6，最大值为0，所以$-6\leqslant g(x)\leqslant 0$，即$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$。

(Ⅲ)由(Ⅱ)知，当$a<-3$时，$M(a)\geqslant F(0)=\left|g(0)-a\right|=-a>3$；当$a>-3$时，$M(a)\geqslant F(-2)=\left|g(-2)-a\right|=6+a>3$；当$a=-3$时，$M(a)=3$。

综上，当$M(a)$最小时，$a=-3$。

(四)考点分析

(1)求出函数$f(x)$的导数，利用给定的单调性列出不等式，再结合恒成立条件求解作答。

(2)根据给定条件，求出a的取值范围，将$f(x_1)+f(x_2)$用a表示，再构造函数并借助导数推理作答。

利用导数解决复合函数问题体现了数学的转化思想，这是高中数学解决实际问题的方法之一。正是因为复合函数和导数的结合使得“函数”因“导数”而精彩。

(责任编辑　黄桂坚)