边附近$f'(x)$同号),则x_0不是函数$f(x)$的极值点;当$x=x_0$是方程$f'(x)=0$的非偶次重根时(即在x_0的左、右两边附近$f'(x)$异号),则x_0才是函数$f(x)$的极值点.只要在求出a值后,若写上“经验证,当$a=4$时,在$x=-1$左右两边附近$f'(x)$异号,所以函数$f(x)$在$x=-1$处能取得极值,符合题意”,则解题过程完善严谨!

错误二:草图过“草”,导致错误判断函数$f(x)$无最大值和最小值.数形结合思想应用得当,有时可达事半功倍之效,但应用不当,即画图不准或太过随意性,则会事倍功半,甚至前功尽弃.

事实上,由$f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+4}$可得,当$x<\dfrac{3}{2}$时,$f(x)>0$;当$x>\dfrac{3}{2}$时,$f(x)<0$.

画出$f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+4}$的图像如图4,结合表格可得$f(x)_{\max}=f(-1)=1$,$f(x)_{\min}=f(4)=-\dfrac{1}{4}$.

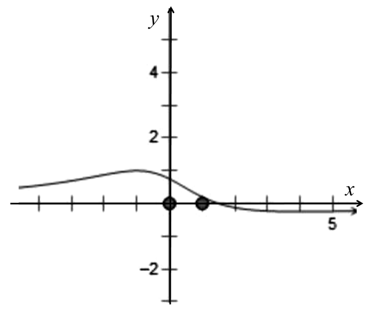

图4

另外,重视变式题教学、重视数学思想与方法的渗透、重视数学思维能力培养、重视引导和启发、重视知识建构过程、增强责任心、因材施教、分层教学、个别课后辅导,…,等等都是数学潜在优生变优的有效教学策略.

数学文化融入试题的路径

浙江省象山县第二中学 (315731) 林 琪

《普通高中数学课程标准(2020 年修订)》,明确指出数学文化应融入数学教学活动,在教学活动中,教师应有意识地结合相应的教学内容,将数学文化渗透在日常教学中,引导学生了解数学的发展历程,认识数学在科学技术、社会发展中的作用.根据数学文化试题背景与数学知识的关联程度,将试题中数学文化的融入方式分为复制式、顺应式和重构式三大类.纵观近年高考,可以发现,数学文化类试题比重逐渐增加,而且每年的高考文化题都充满“数学味”.因此教师应在平时的教学中让学生逐步接触文化类试题,并掌握命题思路.本文以数列为例,论述数学文化融入试题中的路径.

例 1 (2022 届云南师大附中适应性考试)《九章算术》是我国秦汉时期一部杰出的数学著作,书中第三章“衰分”有如下问题:“今有大夫、不更、簪褭、上造、公士,凡五人,共出百钱.欲令高爵出少,以次渐多,问各几何?”意思是:“有大夫、不更、簪褭、上造、公士(爵位依次变低)5 个人共出 100 钱,按照爵位从高到低每人所出钱数成递增等差数列,这 5 个人各出多少钱?”在这个问题中,若不更出 17 钱,则公士出的钱数为( ).

A. 10 B. 14 C. 23 D. 26

解析:设大夫、不更、簪褭、上造、公士所出钱数构成递增等差数列$\{a_n\}$,公差为d,由题意可知$a_2=17$,$S_5=5a_3=100$,$\therefore a_3=20$,$d=a_3-a_2=3$,所以公士出的钱数为$a_5=a_2+3d=26$.故选 D.

评注:**本题以古代数学名著《九章算术》中提出的问题为背景,考查了等差数列基本量的关系式,本题注重考查考生的阅读理解、提取信息、数学建模以及通过计算解决问题的能力,属于基础题.**

笔者仿照例 1,选取等比数列求某项为知识点,寻找素材,以“毕达哥拉斯树”为背景,尝试命题如下:

例 2 毕达哥拉斯树是据勾股定理所画出来的一个可以无限重复的图形,如图 1 所示.因为形状好似一棵树,被称为毕达哥拉斯树,也叫“勾股树”.毕达哥拉斯树以如下方式生长:以边长为 1 的正方形的一边作为斜边,向外作等腰直角三角形,再以等腰直角三角形的两直角边为边向外作正方形,得到 2 个新的小正方形,实现了一次生长;再将这两个小正方形各按照上述方式生长,如此重复下去.则经过 10 次生长,可形成新小正方形个数

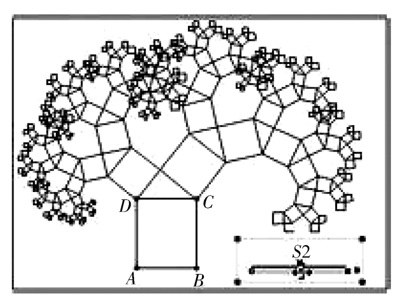

图1

为(　　).

A. 128　　B. 256　　C. 1024　　D. 2048

解析: 由题意得 $a_{n+1}=2a_n$ 且 $a_1=2$, 所以,数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,且该数列的首项和公比均为 2, 因此, $a_n=2^n$, 因此,则经过 10 次生长,可形成 $a_n=2^{10}=1024$ 个新小正方形. 故选 C.

评注: 复制式命制试题往往难度较低,前半部分一般都是以论述的形式,给出背景,对之后的解题影响不大,学生很容易找到数学本质,进行求解.

例 3　(2022 长沙市模拟,多选题)对于正整数 n, $\varphi(n)$ 是小于或等于 n 的正整数中与 n 互质的数的数目. 函数 $\varphi(n)$ 以其首名研究者欧拉命名,称为欧拉函数,例如 $\varphi(9)=6$(1,2,4,5,7,8 与 9 互质),则(　　).

A.　若 n 为质数,则 $\varphi(n)=n-1$

B. 数列 $\{\varphi(n)\}$ 单调递增

C. 数列 $\left\{\dfrac{n}{\varphi(2^n)}\right\}$ 的前 5 项和等于 $\dfrac{7}{2}$

D. 数列 $\{\varphi(3^n)\}$ 为等比数列

解析: 对于 A,若 n 为质数,则与 n 互质的数为 $1,2,3,\cdots,n-1$, 共 $n-1$ 个,即 $\varphi(n)=n-1$. 对于 B,若 $n=3$ 则与 3 互质的数为 1,2, 即 $\varphi(3)=2$, 若 $n=4$ 则与 4 互质的数为 1,3, 即 $\varphi(4)=2$, 所以数列 $\{\varphi(n)\}$ 不是单调递增. 对于 C, $n=2^n$, 则互质的为小于 2^n 的所有奇数,所以 $\varphi(2^n)=2^{n-1}$, $\dfrac{n}{\varphi(2^n)}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$, $\therefore \dfrac{n}{\varphi(2^n)}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$, $\therefore S_5=1+1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}+\dfrac{5}{16}=\dfrac{57}{16}$. 对于 D, $n=3^n$, 则与之互质的为 $1,2,4,5,7,8,\cdots,3^n-2,3^n-1$, 所以 $\varphi(3^n)=\dfrac{2}{3}\times 3^n$, 所以数列 $\{\varphi(3^n)\}$ 为等比数列. 故选 AD.

评注: 本题以数学文化"欧拉函数"为背景,考查数列的通项及求和、判断数列的单调性、等比数列的判断方法等,考查考生的运算能力和逻辑推理能力,属于中档题. 且此题为多选题,考察学生考虑问题的全面性和周全性,选项的设置更是引导考生由浅入深考虑问题. 另外,多选题考察的知识点更多,更难,学生不易得全分,这也体现了数学的选拔功能.

笔者仿照例 3, 选取"冰雹猜想"为背景,考察学生对分段数列求值问题,尝试命题如下:

例 4　任取一个正整数,若是奇数,就将该数乘 3 再加上 1;若是偶数,就将该数除以 2,反复进行上述两种运算,经过有限次步骤后,必进入循环圈 1→4→2→1. 这就是数学史上著名的"冰雹猜想"(又称"角谷猜想"),若取正整数 $m=5$,根据上述运算法则得出 $5\to16\to8\to4\to2\to1$ 共需经过 5 个步骤变成 1(简称为 5 步"雹程")则(　　).

A. 若 $m=17$, 则需要 12 步"雹程".

B. "冰雹猜想"的递推关系可以为:当 n 为偶数时 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$, 当 n 为奇数时 $a_{n+1}=3a_n+1$.

C. 若对于正整数 m, 共需 8 个步骤变成 1,则满足条件的所有 m 构成的集合为 {20,128}.

D. 存在连续的两个正整数 m_1,m_2, 使得两者的"雹程"一样.

解析: 对于 A,若 $m=17$, 则上述运算法则得出 $17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$ 共需经过 12 个步骤变成 1. 对于 B,根据题意,显然正确. 对于 C,可采用逆向思维,所有 m 构成的集合为 {128,21,20,3},如图 2.

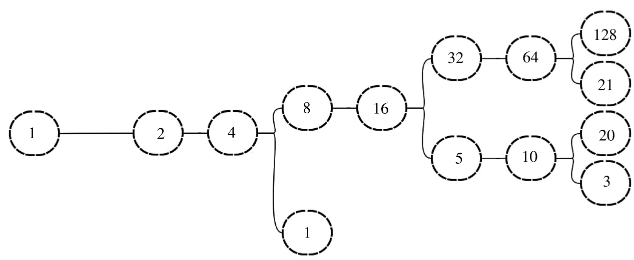

图 2

对于 D,由 C 可知存在连续的两个正整数, $m_1=20$, $m_2=21$ 使得两者的"雹程"都是 8. 因此选 ABD.

评注: 顺应式命制试题往往难度中等,是某一知识点的性质和应用,往往既考察知识点,也考察建模能力,往往比较灵活,学生也容易失分.

例 5　(2020·临沂三模)意大利数学家斐波那契以兔子繁殖为例,引入"兔子数列": 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,⋯, 即 $F(1)=F(2)=1$, $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$, $(n\geqslant 3, n\in N^+)$, 此数列在现代物理、化学等方面都有着广泛的应用. 若此数列被 2 除后的余数构成一个新数列 $\{a_n\}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 2019 项的和为(　　).

A. 672　　B. 673　　C. 1346　　D. 2019

解析: 斐波那契数列各项除以 2 的余数只有 1 和 0, $\{a_n\}$ 为 1,1,0,1,1,0,⋯,1,1,0, 是周期函数. $\therefore S_{2019}=(1+1+0)\times\dfrac{1}{3}\times 2019=1346$, 故选 C.

评注: 本题以"斐波那契"数列为背景,考察周期函数求和. 考察学生阅读理解、数学模型能力,学生需要脱去背景,找到实质是利用斐波那契数列的各项除以 2 的余数特征,得出新数列的周期性,进而

求出结果. 属于中档题. 另外,此题以著名的“斐波那契”数列为背景,增强了学生对数学史的理解,扩宽了学生的眼界.

笔者仿照例 5,在斐波那契数列的基础上加以延伸,以“黄金螺线”为背景,结合扇形的弧长公式,尝试命题如下:

例 6　斐波那契螺旋线也称黄金螺旋线,是根据斐波那契数列画出来的螺旋曲线,如图 3 所示. 首先,我们用以斐波拉契数为边长的两个正方形拼成一个长方形,然后再不断以长方形的边长画对应的正方形,同时再在正方形里面画一个圆心角为 90° 的 $\frac{1}{4}$ 扇形,这样所有的弧线连接起来就是黄金螺线了,当这根黄金螺线无限向外延伸时,它所在的这个矩形就无限的接近一个黄金矩形. 所以这根螺线看起来是如此的迷人,以至于有人称之为“上帝之眼”. 达 · 芬奇的《蒙娜丽莎》,希腊雅典卫城的帕特农神庙等都符合这个曲线. 如图共有 7 个扇形组成,则整个黄金螺线长度为______.

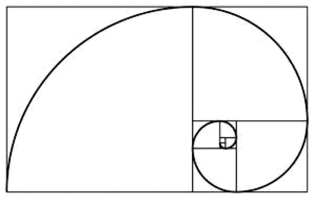

图 3

解析:由题意可知每段黄金曲线与其所在正方形所合成的扇形半径设为 a_n,则数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$,则扇形的长度设为 b_n,则 $b_n=\frac{1}{2}\pi a_n$,则整个黄金螺线的长度为 $S_7=\frac{1}{2}\pi(a_1+a_2+\cdots+a_7)=\frac{1}{2}\pi(1+1+2+3+5+8+13)=\frac{33}{2}\pi$.

评注:重构式命制试题往往难度较高,是某一知识点或者方法的迁移,常涉及多个知识点,能较好考察学生阅读理解能力、建模能力.

综上分析可见,文化类试题更多考察到学生的阅读理解能力,无论那种命题方式,都应该学会脱去背景,寻找文化背景后的数学考点. 教师应在日常教学中经常渗透此类题,让学生更好的经历数学历程、理解数学知识、感受数学思维、体会数学精神. 同时,亦可引导学生关注我国社会的进步与发展,增强民族自豪感,增强爱国情怀,培育和践行社会主义核心价值观,实现数学“以德树人”的教育宗旨.

指向核心素养的单元整体教学设计及思考

——以“直线的倾斜角与斜率”教学过程为例

浙江省金华第一中学　(321015)　魏　燕

课堂教学是落实数学核心素养的关键,教学设计正是连接课程标准、教材及课堂教学的桥梁. 单元整体教学是新课程强调的重点,其教学设计同样强调从知识的联系出发,关注教学目标的整体性、层次性、递进性,在学生获得“四基”、提高“四能”的过程中落实核心素养. 本文以“直线的倾斜角与斜率”教学过程设计为例,谈几点思考.

1　教学过程设计

1.1　阅读章引言,构建先行组织者

引导语　上一章我们以空间向量为工具研究了空间图形的位置关系和距离、角度等度量问题,与立体几何初步的方法比较,你认为用向量方法研究几何问题的特点是什么?

问题 1　解析几何是一门怎样的学科? 它经历了怎样的发展历程? 本章要学哪些内容? 按怎样的路径展开? 请大家阅读章引言,并给出回答.

设计意图:通过回顾向量法、阅读章引言、展示解析几何的发展历史,初步构建用坐标法研究曲线的主体框架.

1.2　探索直角坐标系中确定直线位置的几何要素

问题 2　按照以往的经验,我们从最简单的几何图形直线开始研究. 根据代数方法研究直线,首先要定直线位置的几何要素,然何要素表示出来. 确定一条么? 对于直角坐标系中的一系确定它的位置?

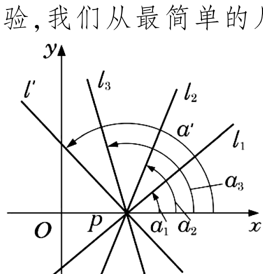

图 1

追问 1　“两点确定