数学问题中辩证思想面面观

◉安徽省亳州市蒙城县第一中学　于康荣

摘要：数学这一数理基础学科，在教育与教学以及命题创设中经常融入辩证思想，具有较好的科学价值与人文价值.本文中结合实例进行梳理，借助辩证思想的内涵与数学学科的关系加以合理渗透，引领并指导教师教学与学生能力培养.

关键词：数学命题；辩证思想；渗透；教育

高中数学教育与教学的目标就是借助数学基本知识、思想方法的学习与应用，培养学生的基本素养，提高数学能力与思维品质，提升认识世界与解决问题的能力.在进行数学命题与创设时，借助辩证思想的渗透，充分体现了“数学是思维的体操”，很好考查学生的数学基本知识、思想方法和能力，倍受各方关注.

1 “动”与“静”辩证思想

从马克思主义物质观来看，“动”与“静”二者之间存在辩证关系，是密不可分的.其中，运动是绝对的，是静止的一般状态；静止是相对的，是运动的特殊状态.“动”中含有“静”，“静”中涉及“动”，形成辩证的统一体.一些数学问题，也经常是完美的“动”与“静”的巧妙组合体.

例 1　(湖南师范大学附属中学 2022 届高三月考数学试卷·8)已知点 $P(2,2)$，若圆 $C:(x-5)^2+(y-6)^2=r^2(r>0)$ 上存在两点 A,B，使得 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AB}$，则 r 的取值范围是(　　).

A.$(0,5)$　B.$\left(\frac{5}{2},5\right)$　C.$[1,5)$　D.$\left[\sqrt{5},\frac{5}{2}\right)$

分析：根据平面解析几何背景，借助圆的基本性质，“动”与“静”结合，通过题目条件建立两线段之间的关系 $|PD|=5|AD|$，引入弦心距 $|CD|=d$，结合勾股定理加以转化，并通过恒等变形来分离参数，再利用弦心距的性质得到关于 r 的不等式，进而确定半径的取值范围.

解析：由题可知圆 C 的圆心坐标为 $(5,6)$，半径为 $r>0$，$|PC|=5$.

设 AB 的中点为 D，则有 $CD\perp AB$.由于 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AB}$，则知 $|PD|=5|AD|$.

设 $|CD|=d$，则 $\sqrt{|PC|^2-d^2}=5\sqrt{r^2-d^2}$，即 $\sqrt{25-d^2}=5\sqrt{r^2-d^2}$.整理，可得 $d^2=\frac{25}{24}(r^2-1)$.

因为 $0\leqslant d<r$，所以 $0\leqslant\frac{25}{24}(r^2-1)<r^2$.

解得 $1\leqslant r<5$.

所以 r 的取值范围是 $[1,5)$.

故选择答案：C.

点评：通过平面几何中圆的弦心距及其特点，合理构建对应的关系式，借助辩证思想，结合问题的巧妙创设与合理过渡，“动”中含有“静”，“静”中涉及“动”，二者之间形成一个完美的统一体，极具辩证思维.

2 “整体”与“局部”辩证思想

从唯物辩证法的角度来看，“整体”与“局部”二者之间的变化与统一是密不可分的.“整体”处于统率的决定地位，可以细分为若干的“局部”；而“局部”处于细节的关键地位，可以有效制约“整体”.

例 2　(2021 届江苏姜堰中学、如东中学、沭阳中学高三上期中数学联考试卷·12)(多选题)已知函数 $f(x)=x^2-4x+(m^2-m)(e^{x-2}+e^{2-x})$(e 为自然对数的底数)有唯一零点，则实数 m 的值可以为(　　).

A.1　　B.-1　　C.2　　D.-2

分析：利用“整体”与“局部”的关系，合理参变分离，将一个函数零点个数的“整体”问题分解为两个函数图象的“局部”交点个数问题，利用“整体”与“局部”二者之间的统一与联系，借助数形结合，形象直观地确定参数的取值问题.

解析：因为函数 $f(x)=x^2-4x+(m^2-m)\cdot(e^{x-2}+e^{2-x})$ 有唯一零点，所以对应的方程 $x^2-4x+(m^2-m)(e^{x-2}+e^{2-x})=0$ 有唯一的实数根.

分离参数，可知直线 $y=m^2-m$ 与函数 $g(x)=\frac{4x-x^2}{e^{x-2}+e^{2-x}}$ 的图象有唯一交点.

将函数 $g(x)=\frac{4x-x^2}{e^{x-2}+e^{2-x}}$ 的图象向左平移 2 个单位，可得函数 $h(x)=\frac{4-x^2}{e^x+e^{-x}}$ 的图象.

由于函数 $h(x)=\frac{4-x^2}{e^x+e^{-x}}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，因此其对应的图象关于 y 轴对称.

又 $h(0)=2$，函数 $h(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，

$h(2)=0$，又当 $x>2$ 时，$h(x)<0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 0^-$，所以函数 $h(x)$ 对应的图象如图1所示.

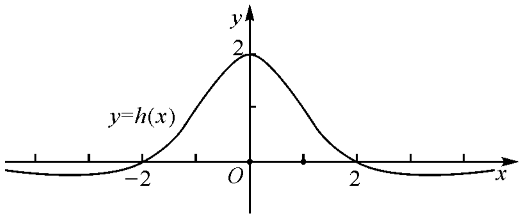

图1

所以，方程 $x^2-4x+(m^2-m)(e^{x-2}+e^{2-x})=0$ 有唯一实数根，只需 $m^2-m=2$.

解得 $m=-1$ 或2.

故选择答案：BC.

点评：合理分离参数，利用两个基本初等函数的图象与性质进行“整体”与“局部”处理.借助辩证思想，把握全局，从“整体”入手，寻找最优目标；搞好局部，从“局部”深入，发挥最佳切入点.

3 “相等”与“不等”辩证思想

从问题实质层面来看，“相等”与“不等”是一对互相矛盾的辩证统一体的两个方面.在一定的条件下“相等”与“不等”是可以相互利用，相互转化的，经常利用“相等”可以导出“不等”的结果，利用“不等”也可以推出“相等”的结论，极具辩证思维.一些数学问题中，经常借助“相等”与“不等”的化归与转化来实现问题的破解.

例3 （河北省省级联测2022届高三上学期第一次考试数学试卷·7）若 $x>0,y>0$，且 $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{x+y}=1$，则 $2x+y$ 的最小值为（　　）.

A.2　　B.$2\sqrt{2}$　　C.$1+\sqrt{2}$　D.$2+2\sqrt{2}$

分析：结合题目所求的二元代数式进行整体换元处理，将代数关系式转化为关于参数 x 的二次方程，进而根据方程有正实数解，实现“相等”与“不等”之间的巧妙转化，通过判别式法构建对应的不等式，从而确定相应的最值问题.

解析：设 $2x+y=t>0$，则 $y=t-2x$.

将上式代入 $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{x+y}=1$ 中，可得 $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{t-x}=1$，整理得 $2x^2+(2-2t)x+1=0$.

由题意知，以上关于参数 x 的二次方程有正数解，那么判别式 $\Delta=(2-2t)^2-4\times2\times1=4t^2-8t-4\geqslant0$.解得 $t\leqslant1-\sqrt{2}$（舍去），或 $t\geqslant1+\sqrt{2}$.

所以 $2x+y$ 的最小值为 $1+\sqrt{2}$，当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=1$ 时，等号成立.

故选择答案：C.

点评：通过方程有根来合理数学建模，结合判别式，利用求解不等式来实现“相等”与“不等”的巧妙转化.借助辩证思想，通过“相等”与“不等”的有效化归与转化，用“相等”可以解决“不等”问题，用“不等”可以解决“相等”问题，实现二者之间的巧妙过渡，合理转化，辩证应用.

4 “变化”与“不变”辩证思想

从事物运动发展角度来看，“变化”与“不变”二者之间和谐统一，既相互依赖又相互包含，在一定的条件下还可以相互转化.在实际分析与解决问题中，要从“变化”中寻找“不变”元素，从“不变”中辨别“变化”因子，形成良好的思维高度与广度，科学辩证分析与解决问题.

例4 （2022届湖北省恩施州高三年级第一次教学质量监测考试数学试卷·7）如图2，圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AD=2$，$CD=4$，BD 是圆的直径，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$（　　）.

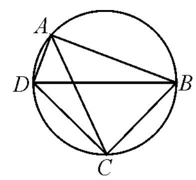

图2

A.12　　　　B.-12

C.20　　　　D.-20

分析：利用圆的直径确定线段的垂直关系，利用平面向量的投影构建对应的平面向量的数量积关系式，实现“变化”与“不变”的转化，通过所求平面向量数量积的合理线性运算，借助等量代换加以恒等变形，进而得以分析与求解.

解析：由于 BD 是圆的直径，因此可得 $AB\perp AD$，$CB\perp CD$.结合平面向量的投影，可得

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}^2,\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}^2.$$

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=-(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}^2-\overrightarrow{DC}^2=2^2-4^2=-12$.

故选择答案：B.

点评：直接利用平面向量的投影加以转化与变形，合理联系“变化”与“不变”，数形结合，巧妙应用.借助辩证思想，在具体数学问题中，学生具有基本实现运动与变化、变量与常量、定值与最值等“变化”与“不变”的一些具有辩证统一体之间的转化与应用能力.

在高中数学教育与教学中，借助辩证思想，实现不同层面之间的合理化归与转化，充分强调思想上的引领，更加全面宏观地看待学生的整体情况与长远发展，铺砖砌石，在传授学科知识的同时，充分体现科学价值并渗透人文价值，很好考查学生的数学知识、思想方法和数学能力，有效提升数学思维品质，培养数学核心素养.Z