文化情境创设,数列知识应用*

◉江苏省口岸中学　陈春花

数列作为高中数学的一大主干知识,其与数学文化情境的渗透与融合,有着丰富的应用场景,现选取四个方面的案例与大家分享.

1 数学名著

例1　[2022—2023学年辽宁省沈阳四中高三(上)月考数学试题(9月份)]南宋数学家在《详解九章算法》和《算法通变本末》中提出了一些新的垛积公式,所讨论的高阶等差数列与一般等差数列不同,高阶等差数中前后两项之差并不相等,但是逐项差数之差或者高次差成等差数列.现有高阶等差数列,其前7项分别为1,2,5,10,17,26,37,则该数列的第19项为(　　).

A.290　　B.325　　C.362　　D.399

分析:本题选择数学名著中的垛积公式作为文化背景.先由条件判断该高阶等差数列为逐项差数之差成等差数列,得到$a_{n+1}-a_n=2n-1$,再利用累加法求得数列的通项公式,进而可求得对应项的值.

解析:设该数列为$\{a_n\}$,则由$a_2-a_1=2-1=1$,$a_3-a_2=5-2=3$,$a_4-a_3=10-5=5$,$a_5-a_4=17-10=7$,……,可知该数列逐项差数之差成等差数列$\{b_n\}$,其首项为1,公差为2,所以$b_n=1+2(n-1)=2n-1$,故$a_{n+1}-a_n=b_n=2n-1$.

于是$a_2-a_1=1$,$a_3-a_2=3$,$a_4-a_3=5$,……,$a_n-a_{n-1}=2n-3$.

上述各式累加,可得$a_n-a_1=1+3+5+\cdots+(2n-3)=\dfrac{(n-1)(1+2n-3)}{2}=(n-1)^2$.

所以$a_n=(n-1)^2+a_1=(n-1)^2+1$,则$a_{19}=18^2+1=325$.故选择答案:B.

2 历史律法

例2　[2022年华大新高考联盟高考数学教学质量测评试卷(3月份)]十二平均律是我国明代音乐理论家和数学家朱载堉发明的.明万历十二年(公元1584年),他写成《律学新说》,提出了十二平均律的理论.十二平均律的数学意义是:在1和2之间插入11个数,使包含1和2的这13个数依次成递增的等比数列,记插入的11个数之和为M,插入11个数后这13个数之和为N,则依此规则,下列说法错误的是(　　).

A.插入的第8个数为$\sqrt[3]{4}$

B.插入的第5个数是插入的第1个数的$\sqrt[3]{2}$倍

C.$M>3$

D.$N<7$

分析:本题选择"十二平均律"作为文化背景,考查了等比数列的通项公式、前n项和公式、比较大小等基本知识.

解析:设递增的等比数列为$\{a_n\}$,公比为q.

依题意得,$a_1=1$,$a_{13}=2$,则$q^{12}=2$,于是$a_9=a_1q^8=2^{\frac{8}{12}}=\sqrt[3]{4}$,故选项A正确.

而$\dfrac{a_6}{a_2}=q^4=\sqrt[3]{2}$,故选项B正确.

由题意知公比$q>0$,所以$q=2^{\frac{1}{12}}$.

故$M=\dfrac{a_2(1-q^{11})}{1-q}=\dfrac{\sqrt[12]{2}(1-\sqrt[12]{2^{11}})}{1-\sqrt[12]{2}}=\dfrac{\sqrt[12]{2}-2}{1-\sqrt[12]{2}}=-1-\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}$.要证$M>3$,只需证$-1-\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}>3$,即证$\dfrac{1}{2^{\frac{1}{12}}-1}>4$,即证$\dfrac{5}{4}>2^{\frac{1}{12}}$,即证$\left(\dfrac{5}{4}\right)^{12}>2$.而$\left(\dfrac{5}{4}\right)^{12}>\left(\dfrac{3}{2}\right)^{6}>2$,故选项C正确.

而$N=M+3$,要证$N>7$,即证$M>4$,即证$-1-\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}>4$,即证$\dfrac{1}{2^{\frac{1}{12}}-1}>5$,即$\dfrac{6}{5}>2^{\frac{1}{12}}$,即证$\left(\dfrac{6}{5}\right)^{12}>2$.而$\left(\dfrac{6}{5}\right)^{12}>(1.4)^6>(1.9)^3>2$,故选项D错误.

故选择答案:D.

点评:借助历史律法中数学文化情境下的数列问题,通过一些历法、音乐、美术等方面的历史文化遗产来创新设置,融入数列的基本概念等基础知识,结合实际问题以及学科交叉融合进行综合与创新应用.

* 课题信息:本文系江苏省中小学教学研究第十四期重点资助课题"数学文化融入高中数学'阅读板块'的教学现状及实现路径研究"(课题编号:2021JY14-ZA30)的阶段性研究成果.

3 古代建筑

例3 [2022年四川省成都市树德中学高三(上)段考数学试卷(10月份)]北宋著名建筑学家李诫编写了一部记录中国古代建筑营造规范的书《营造法式》,其中说到"方一百,其斜一百四十有一",即一个正方形的边长与它的对角线的比是1∶1.414,接近 $1:\sqrt{2}$.如图1,该图由等腰直角三角形拼接而成,以每个等腰直角三角形斜边的中点作为圆心,斜边的一半为半径作一个圆心角是90°的圆弧,所得弧线称为 $\sqrt{2}$ 螺旋线,称公比为 $\sqrt{2}$ 的数列为 $\sqrt{2}$ 等比数列.已知 $\sqrt{2}$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,满足 $S_{n+2}=2S_n+2(1+\sqrt{2})$.若 $b_n=\log_{\sqrt{2}}a_n$,且 $\sum\limits_{i=1}^{6}\frac{1}{4b_i^2-1}\leqslant 10^{\lambda-5}$,则 λ 的最小整数为________.(参考数据:lg 2≈0.301 0,lg 3≈0.477 1.)

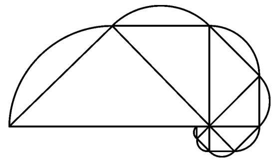

图1

分析:本题选择古建筑中的"$\sqrt{2}$ 螺旋线"为文化背景,给出"$\sqrt{2}$ 等比数列"的概念,这个概念是本题的突破点.

解析:由题意知,公比为 $\sqrt{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $S_{n+2}=2S_n+2(1+\sqrt{2})$.

所以 $\frac{a_1[(\sqrt{2})^{n+2}-1]}{\sqrt{2}-1}=2\times\frac{a_1[(\sqrt{2})^{n}-1]}{\sqrt{2}-1}+2(1+\sqrt{2})$,化简可得 $a_1=2$.

于是有 $a_n=2\times(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{n+1}$,可得

$$b_n=\log_{\sqrt{2}}a_n=n+1.$$

而 $\frac{1}{4b_n^2-1}=\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$.

结合 $\sum\limits_{i=1}^{6}\frac{1}{4b_i^2-1}\leqslant 10^{\lambda-5}$,可得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)=\frac{2}{15}\leqslant 10^{\lambda-5}.$$

当 $\lambda=4$ 时,$\frac{2}{15}>\frac{1}{10}$,则 λ 的最小整数为5.

故填答案:5.

点评:巧妙融入建筑、美术、数学等多个相关学科的知识,交汇综合,抓住特色建筑的数学模型合理构建相应的数列模型,利用相关数列的基础知识与基本思想方法来解决问题.

4 经典模型

例4 [2022年重庆市巴蜀中学高三(上)适应性数学试卷(四)](多选题)在1261年,我国南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法》中提出了如图2所示的三角形数表,这就是著名的"杨辉三角",它是二项式系数在三角形中的一种几何排列.从第1行开始,第 n 行从左至右的数字之和记为 a_n,如,$a_1=1+1=2$,$a_2=1+2+1=4$,……,$\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n,依次去掉每一行中所有的1构成的新数列2,3,3,4,6,4,5,10,10,5,……,记为 b_n,$\{b_n\}$ 的前 n 项和记为 T_n,则下列说法正确的是(　　).

第1行　1　1
第2行　1　2　1
第3行　1　3　3　1
第4行　1　4　6　4　1
第5行　1　5　10　10　5　1
……　……　……　……

图2

A.$S_{10}=1\ 022$

B.$\left\{\frac{2a_n}{S_nS_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+2}-2}$

C.$b_{57}=66$

D.$T_{57}=4\ 150$

分析:本题选择"杨辉三角"这个经典模型作为文化模型,构造出两个新数列.

解析:从第一行起,每一行的数依次对应 $(a+b)^n$ 的二项式系数,所以 $a_n=(1+1)^n=2^n$.故 $\{a_n\}$ 为一个等比数列,则 $S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

于是 $S_{10}=2^{11}-2\neq 1\ 022$,故选项A错误.

而 $\frac{2a_n}{S_nS_{n+1}}=\frac{2^{n+1}}{(2^{n+1}-2)(2^{n+2}-2)}=\frac{1}{2^{n+1}-2}-\frac{1}{2^{n+2}-2}$,则 $\left\{\frac{2a_n}{S_nS_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{2^2-2}-\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{2^3-2}-\frac{1}{2^4-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-2}-\frac{1}{2^{n+2}-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+2}-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+2}-2}$,故选项B正确.

去掉每一行中的1以后,每一行剩下的项数分别为0,1,2,3,……,构成一个等差数列.由项数之和 $\frac{n(n+1)}{2}\leqslant 57$,得 n 的最大整数为10.

杨辉三角中取满了第11行,第12行首位为1,不在 $\{b_n\}$ 中应去掉,b_{57} 就是第12行中的第三项,则 $b_{57}=C_{12}^2=66$,故选项C正确.

而 $S_{11}=2^{12}-2$,这11行中共去掉了22个1,则知 $T_{57}=S_{11}-22+b_{56}+b_{57}=4\ 094-22+C_{12}^1+C_{12}^2=4\ 150$,故选项D正确.

故选择答案:BCD.

点评:结合"杨辉三角"这一经典的数字模型的排列规律,融合数列、二项式定理、排列组合等相关知识,巧妙逻辑推理,合理数学运算,进而得以分析与处理创新文化情境问题.

数学不仅仅是"科学的数学",而且还是"文化的数学".而数学文化创新情境下的数列综合应用问题,只是其中的一个典型代表,是国家文化素质教育的重要组成部分,是在实践过程中不断探索形成的数学史、数学精神及其应用等.借助数学文化创新情境的设置,将数学知识、思想方法、数学文化等融为一体,全面检测学生的数学基础知识、思维广度与深度,不断挖掘学生潜能.Z