

2023 新高考 2 卷很难?

一份您值得拥有的逐题详细解析!!!

(逐题视频解析陆续更新中)

(选填答案速递)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	D	B	C	C	D	C	AC	AC	BCD	ABD

13	14	15	16
$\sqrt{3}$	28	$2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 中选一个即可;	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(逐题详解)

1. 在复平面内 $(1+3i)(3-i)$ 对应的点位于

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【参考解析】 $z = (1+3i)(3-i) = 3-i+9i-3i^2 = 6+8i$, 故在第一象限, 故选 A;

2. 设集合 $A = \{0, -a\}$, $B = \{1, a-2, 2a-2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$

A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1

【参考解析 1】直接验证选项, 观察 BD, 因此先验证 $a=1$,

此时 $A = \{0, -1\}$, $B = \{1, -1, 0\}$, 满足, 故直接选 B;

【参考解析 2】依题有 $a-2=0$ 或 $2a-2=0$;

当 $a-2=0$ 时, 解得 $a=2$, 此时 $A = \{0, -2\}$, $B = \{1, 0, 2\}$, 不满足;

当 $2a-2=0$ 时, 解得 $a=1$, 后面同解析 1;

3. 某学校为了解学生参加体育运动的情况, 用比例分配的分层随机抽样作抽样调查, 拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生, 已知该校初中部和高中部分别有 400 和 200 名学生, 则不同的抽样结果共有 () 种

A. $C_{400}^{45}C_{200}^{15}$ B. $C_{400}^{20}C_{200}^{40}$ C. $C_{400}^{30}C_{200}^{30}$ D. $C_{400}^{40}C_{200}^{20}$

【参考解析】由分层抽样已知初中部抽 40 人, 高中部抽 20 人, 所以为 $C_{400}^{40}C_{200}^{20}$, 故选 D;

4. 若 $f(x) = (x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则 $a =$

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【参考解析】由九大奇函数易知 $y = \ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为奇函数, 所以 $y = x+a$ 也要为奇函数, 故 $a=0$, 故选 B;

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y = x+m$ 与 C 交于 A, B 两点, 若 ΔF_1AB 的面积是 ΔF_2AB 的 2 倍, 则 $m =$

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

【参考解析】依题有 $\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$, 解得 $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ 或 $m = -3\sqrt{2}$ (舍), 故选 C;

【细节纠错】湖北雷誉老师

6. 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 则 a 的最小值为

A. e^2 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}

【参考解析】 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x} \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立, 即 $0 < \frac{1}{a} \leq xe^x$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立,

令 $g(x) = xe^x$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x$ 在 $(1, 2)$ 上单增, 所以 $\frac{1}{a} \leq g(1) = e$, 所以 $a \geq e^{-1}$, 故选 C;

7. 已知 α 为锐角, $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} =$

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$ C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【参考解析 1】由二倍角公式得 $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$, 用代选项验证法知 D 对;

【参考解析 2】由二倍角公式得 $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$, 所以 $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, 而 $\sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ 无选项对应, 故本题肯定不满足, 故选 D;

验证的事就留到考后分析;

8. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = -5$, $S_6 = 21S_2$, 则 $S_8 =$

A. 120 B. 85 C. -85 D. -120

【参考解析 1】依题有 $\begin{cases} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = -5 \\ \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21 \times \frac{a_1(1-q^2)}{1-q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{3} \end{cases}$,

所以 $S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{1}{3} \times (1-4^4) = -85$, 故选 C;

【参考解析 2】易知 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4, S_8 - S_6$ 也为等比数列,

所以 $(S_4 - S_2)^2 = S_2 \cdot (S_6 - S_4)$, 解得 $S_2 = -1$ 或 $S_2 = \frac{5}{4}$,

当 $S_2 = -1$ 时, $(S_6 - S_4)^2 = (S_4 - S_2) \cdot (S_8 - S_6) \Rightarrow S_8 = -85$;

当 $S_2 = \frac{5}{4}$ 时, 与 $S_4 = -5$ 联立会推出 $q^2 = -5$, 故舍去;

多选:

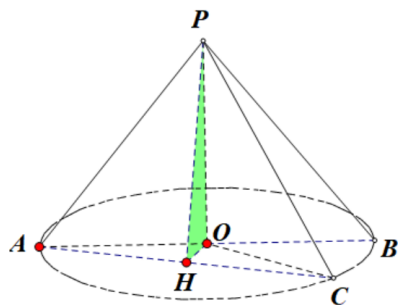
9. 已知圆锥的顶点为 P , 底面圆心为 O , AB 为底面直径, $\angle APB = 120^\circ$, $PA = 2$, 点 C 在底面圆周上, 且二面角 $P-AC-O$ 为 45° , 则

A. 该圆锥的体积为 π B. 该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

C. $AC=2\sqrt{2}$

D. $\triangle PAC$ 的面积为 $\sqrt{3}$

【参考解析】



如上图所示,由几何关系易知 $PO=1=h$, $AO=BO=\sqrt{3}=r$,
取 AC 中点为 H ,则二面角 $P-AC-O$ 即为 $\angle PHO=45^\circ$,所以 $OH=PO=1$,
所以 $AH=CH=\sqrt{AO^2-OH^2}=\sqrt{2}$,所以 $AC=2\sqrt{2}$,

对于 A: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\pi$,故 A 对;

对于 B: $S_{\text{侧}}=\pi r l=2\sqrt{3}\pi$,故 B 错;

对于 C:由前面分析知对;

对于 D: $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times AC\times PH=2$,故 D 错;

综上,选 AC.

10. 设 O 为坐标原点,直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点且与 C 交于 M, N 两点, l 为 C 的准线,则

A. $p=2$

B. $|MN|=\frac{8}{3}$

C. 以 MN 为直径的圆与 l 相切D. $\triangle OMN$ 为等腰三角形

【参考解析】易知焦点为 $(1,0)$,所以 $\frac{p}{2}=1\Rightarrow p=2$,故 A 对;

由抛物线常见结论知 $|MN|=\frac{4}{\sin^2\frac{2\pi}{3}}=\frac{16}{3}$,故 B 错;(下面增加联立的常规过程);

联立 $\begin{cases} y=-\sqrt{3}(x-1) \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow 3x^2-10x+3=0$,所以 $M(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}), N(3, -2\sqrt{3})$,

所以 $|MN|=\frac{16}{3}$,故 B 错;

同样由抛物线常见结论知 C 对;

由前面知 $|OM|=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $|ON|=\sqrt{21}$, $|MN|=\frac{16}{3}$,故 D 错;

综上,选 AC.

考后分析 C:

圆心为 $M(\frac{5}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$, $r=\frac{|MN|}{2}=\frac{8}{3}=\frac{5}{3}+1$,故 C 对;

11. 若函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ ($a \neq 0$) 既有极大值也有极小值,则

A. $bc > 0$

B. $ab > 0$

C. $b^2 + 8ac > 0$

D. $ac < 0$

【参考解析】因为 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ ($a \neq 0$), 所以定义域 $x > 0$,

易知 $f(x) = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}$, 令 $ax^2 - bx - 2c = 0$, 则题目等价于有两个不相等的正解 x_1, x_2 ,

$$\text{故} \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + 8ac > 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \\ \frac{-2c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + 8ac > 0 \\ ab > 0 \\ ac < 0 \\ bc < 0 \end{cases},$$

故选 BCD

12. 在信道内传输 0, 1 信号, 信号的传输相互独立。发送 0 时, 收到 1 的概率为

α ($0 < \alpha < 1$), 收到 0 的概率为 $1 - \alpha$; 发送 1 时, 收到 0 的概率为 β ($0 < \beta < 1$), 收到 1 的概率

为 $1 - \beta$ 。考虑两种传输方案: 单次传输和三次传输, 单次传输是指每个信号只发送 1 次; 三

次传输是指每个信号重复发送 3 次。收到的信号需要译码, 译码规则如下: 单次传输时, 收到的信号即为译码; 三次传输时, 收到的信号中出现次数多的即为译码 (例如, 若依次收到 1, 0, 1, 则译码为 1)。

A. 采用单次传输方案, 若依次发送 1, 0, 1, 则依次收到 1, 0, 1 的概率为 $(1 - \alpha)(1 - \beta)^2$

B. 采用三次传输方案, 若发送 1, 则依次收到 1, 0, 1 的概率为 $\beta(1 - \beta)^2$

C. 采用三次传输方案, 若发送 1, 则译码为 1 的概率为 $\beta(1 - \beta)^2 + (1 - \beta)^3$

D. 当 $0 < \alpha < 0.5$ 时, 若发送 0, 则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

【参考解析】

关键信息:

发 0 收 1 概率为 α ; 发 0 收 0 概率为 $1 - \alpha$;

发 1 收 0 概率为 β ; 发 1 收 1 概率为 $1 - \beta$;

对于 A: 则为发 1 收 1 概率为 $1 - \beta$, 发 0 收 0 概率为 $1 - \alpha$, 发 1 收 1 概率为 $1 - \beta$,

故 $P_A = (1 - \alpha)(1 - \beta)^2$, A 对;

对于 B: 则为发 1 收 1 概率为 $1 - \beta$, 发 1 收 0 概率为 β , 发 1 收 1 概率为 $1 - \beta$,

故 $P_B = \beta(1 - \beta)^2$, B 对;

对于 C: 分为发 1 收 2 个 1 和 1 个 0 和发 1 收 3 个 1,

所以 $P_C = C_3^2 \cdot \beta(1 - \beta)^2 + C_3^3 \cdot (1 - \beta)^3 = 3\beta(1 - \beta)^2 + (1 - \beta)^3$, 故 C 错;

对于 D:

三次译码为 0, 分为发 0 收 2 个 0 和 1 个 1 和发 0 收 3 个 0,

此时 $P_1 = C_3^2 \cdot \alpha(1 - \alpha)^2 + C_3^3 \cdot (1 - \alpha)^3 = 3\alpha(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3$,

单次译码为 0: $P_2 = (1 - \alpha)$,

$P_1 - P_2 = 3\alpha(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 - (1 - \alpha) = \alpha(1 - \alpha)(1 - 2\alpha) > 0$, 故 D 对;

综上, 选 ABD;

13. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $|\vec{b}| =$ _____.

【参考解析】

因为 $|\vec{a} + \vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}|$, 所以 $\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \Rightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

又因为 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \Rightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 3 \Rightarrow \vec{b}^2 = 3 \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{3}$.

14. 底面边长为4的正四棱锥被平行于其底面的平面所截,截去一个底面边长为2,高为3的正四棱锥,所得棱台的体积为_____.

【参考解析】由相似易知剩下的棱台的高为3,

所以 $V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}})h = \frac{1}{3}(4 + 16 + \sqrt{4 \times 16}) \times 3 = 28$;

【参考解析2】由相似易知剩下的棱台的高为3,

所以 $V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 6 - \frac{1}{3} \times 2^2 \times 3 = 28$;

15. 已知直线 $x - my + 1 = 0$ 与圆 $C: (x - 1)^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点, 写出满足“ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{8}{5}$ ”的 m 的一个值_____.

【参考解析】 $S = \frac{1}{2}r^2 \sin \angle ACB = \frac{8}{5} \Rightarrow \sin \angle ACB = \frac{4}{5}$, 所以 $\cos \angle ACB = \pm \frac{3}{5}$,

由余弦定理得 $AB = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \angle ACB}$,

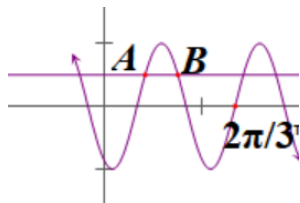
所以 $AB = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ 或 $AB = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

套弦长公式得 $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $d = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

套心线距得 $\frac{2}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow m = \pm 2$ 或 $\frac{2}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$,

故填 $2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 中的一个即可.

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \phi)$, 如图 A, B 是直线 $y = \frac{1}{2}$ 与曲线 $y = f(x)$ 的两个交点, 若 $|AB| = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(\pi) =$ _____.



【参考解析】由按图索骥法易知 $\omega x_A + \phi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ①; $\omega x_B + \phi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ②;

两式相减得 $\omega(x_B - x_A) = \frac{4\pi}{6} \Rightarrow \omega \times \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} \Rightarrow \omega = 4$,

所以 $f(x) = \sin(4x + \phi)$,

将 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 代入得 $4 \times \frac{2\pi}{3} + \phi = 2k\pi \Rightarrow \phi = 2k\pi - \frac{8\pi}{3}$,

所以 $f(x) = \sin(4x + 2k\pi - \frac{8\pi}{3}) = \sin(4x - \frac{8\pi}{3})$.

所以 $f(\pi) = \sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

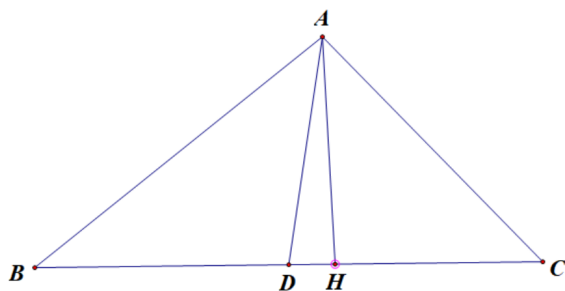
17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 面积为 $\sqrt{3}$, D 为 BC 中点, 且 $AD=1$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, 求 $\tan B$;

(2) 若 $b^2 + c^2 = 8$, 求 b, c .

【参考解析】

(1)



如图, 过 A 点作 $AH \perp BC$ 交 BC 于点 H ,

则 $AH = AD \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $DH = AD \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

由题易知 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \sqrt{3} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{3}}{AH} = 4$,

所以 $\tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{AH}{BD + DH} = \frac{\sqrt{3}}{5}$;

(思路2: 后面也可以用余弦定理算 AB , 再用余弦定理算, 只是没解析1简洁.)

(2) 由中点与向量易知 $2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$,

所以 $4\vec{AD}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, 即 $4 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$,

由余弦定理得 $4 = b^2 + c^2 + b^2 + c^2 - a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$,

由面积公式得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{2\sqrt{3}}{bc}$,

而 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-2}{bc}$,

因为 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{3}}{bc}\right)^2 + \left(\frac{-2}{bc}\right)^2 = 1 \Rightarrow bc = 4$,

与 $b^2 + c^2 = 8$ 联立解得 $b = c = 2$.

18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $b_n = \begin{cases} a_n - 6, n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 记 S_n, T_n 为 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, $S_4 = 32, T_3 = 16$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$.

【参考解析】

(1) 设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d ,

因为 $S_4 = 32$, 所以 $4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = 32 \Rightarrow 2a_1 + 3d = 16$, ①

又因为 $T_3 = 16$,

所以 $b_1 + b_2 + b_3 = 16 \Rightarrow (a_1 - 6) + 2a_2 + (a_3 - 6) = 16 \Rightarrow 4a_2 = 28 \Rightarrow a_2 = 7 = a_1 + d$, ②

联立①②解得 $\begin{cases} a_1 = 5 \\ d = 2 \end{cases}$, 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n + 3, n \in N^*$.

(2) 由 (1) 知 $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = n^2 + 4n$ (或用 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2 + 4n$)

当 n 为奇数时,

$$\begin{aligned} T_n &= (b_1 + b_3 + \cdots + b_n) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{n-1}) \\ &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_n) - 6 \times \frac{n+1}{2} + 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1}) \\ &= 2S_n - (a_1 + a_3 + \cdots + a_n) - 3(n+1) \\ &= 2S_n - \frac{(a_1 + a_n) \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)}{2} - 3(n+1) \end{aligned}$$

所以 $T_n - S_n = \frac{n^2 - 3n - 10}{2} = \frac{(n+2)(n-5)}{2}$, 因为 $n > 5$, 所以 $T_n - S_n > 0$

(或类比二次函数性质知 $T_n - S_n = \frac{n^2 - 3n - 10}{2} > \frac{5^2 - 3 \times 5 - 10}{2} = 0$)

故 n 为奇数时成立;

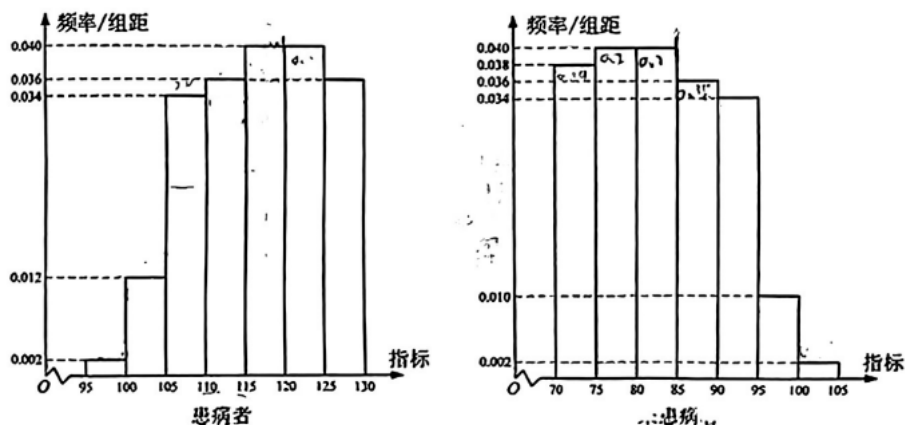
当 n 为偶数时,

$$T_n - S_n = T_{n-1} - S_{n-1} + b_n - a_n = \frac{(n-1)^2 - 3(n-1) - 10}{2} + 2a_n - a_n = \frac{n(n-1)}{2} > 0,$$

综上, 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$.

19. (12分)

某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异, 经过大量调查, 得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图:



利用该指标制定一个检测标准, 需要确定临界值 c , 将该指标大于 c 的人判定为阳性, 小于或等于 c 的人判定为阴性, 此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率, 记为 $p(c)$; 误诊率是将未患病者判定为阳性的概率, 记为 $q(c)$. 假设数据在组内均匀分布. 以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

(1) 当漏诊率 $p(c) = 0.5\%$ 时, 求临界值 c 和误诊率 $q(c)$;

(2) 设函数 $f(c) = p(c) + q(c)$, 当 $c \in [95, 105]$ 时, 求 $f(c)$ 的解析式, 并求 $f(c)$ 在区间 $[95, 105]$ 的最小值,

【参考解析】

(1) 因为 $0.002 \times 5 = 0.01 > 0.5\%$, 故 $c \in [95, 100]$,

由比例得 $c = 0.002 \times 5 \times \frac{c-95}{100-c} = 0.5\% \Rightarrow c = 97.5$;

$q(c) = 0.010 \times 5 \times \frac{100-97.5}{100-95} + 0.002 \times 5 = 0.035$;

所以临界值 $c = 97.5$, 误诊率 $q(c) = 0.035$.

(2)

① 当 $c \in [95, 100]$ 时, $p(c) = 0.002 \times 5 \times \frac{c-95}{100-95} = 0.002(c-95)$,

$q(c) = 0.010 \times 5 \times \frac{100-c}{100-95} + 0.002 \times 5 = 0.01(101-c)$;

所以 $f(c) = p(c) + q(c) = 0.82 - 0.008c \geq 0.82 - 0.008 \times 100 = 0.02$;

① 当 $c \in (100, 105]$ 时, $p(c) = 0.002 \times 5 + 0.012 \times 5 \times \frac{c-100}{105-100} = 0.01 + 0.012(c-100)$,

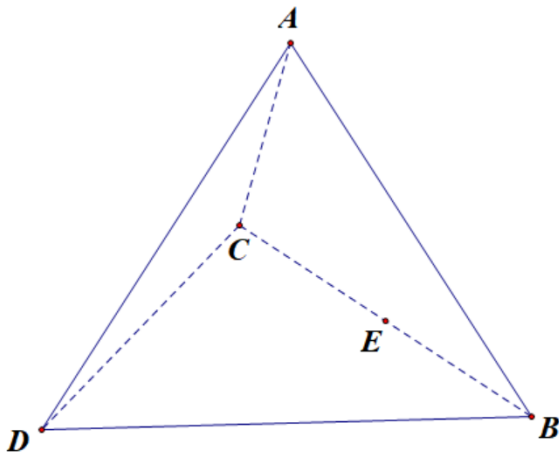
$q(c) = 0.002 \times 5 \times \frac{105-c}{105-100} = 0.002(105-c)$,

所以 $f(c) = p(c) + q(c) = 0.01c - 0.98 \geq 0.01 \times 100 - 0.98 = 0.02$;

综上, 所以 $f(c)$ 的解析式为 $f(c) = \begin{cases} 0.82 - 0.008c, & 95 \leq c \leq 100 \\ 0.01c - 0.98, & 100 < c \leq 105 \end{cases}$, $f(c)$ 在

区间 $[95, 105]$ 的最小值 0.02 .

20. 如图, 三棱锥 $A-BCD$ 中, $DA = DB = DC$, $BD \perp CD$, $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$, E 为 BC 的中点.



(1) 证明: $BC \perp DA$;

(2) 点 F 满足 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$, 求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.

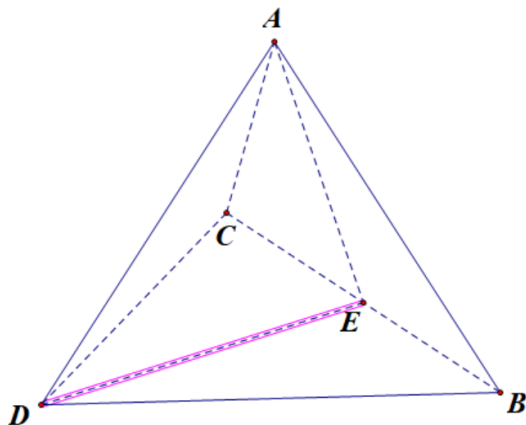
【参考解析】

(1) 如图, 连接 AE , DE ,

因为 $DB = DC$, $DA = DA$, $\angle ADB = \angle ADC$,

所以 $\triangle ADC \cong \triangle ADB$, 所以 $AC = AB$,

又因为 E 为 BC 的中点, 所以 $BC \perp AE$, $BC \perp DE$,



而 $AE \cap DE = E$, $AE, DE \subset$ 平面 ADE , $BC \not\subset$ 平面 ADE ,
所以 $BC \perp$ 平面 ADE ,

又因为 $AD \subset$ 平面 ADE , 所以 $BC \perp DA$;

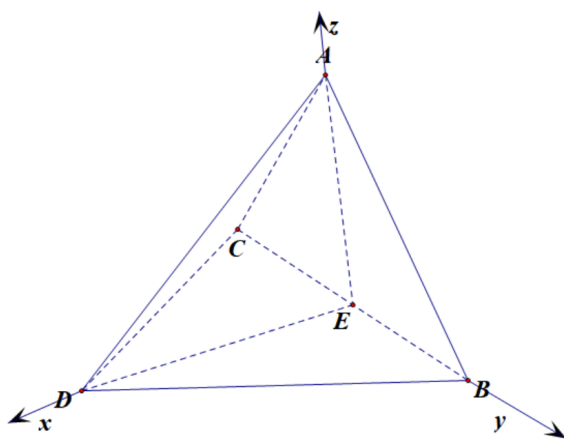
(2) 不妨设 $DA = DB = DC = \sqrt{2}$, 因为 $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$,
所以 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 为等边三角形, 所以 $AC = AB = \sqrt{2}$,

又因为 $BD \perp CD$, 所以 $BC = \sqrt{DC^2 + DB^2} = 2$,

所以 $DE = AE = 1$, 所以 $DE^2 + AE^2 = AD^2$,

故由勾股定理逆定理知 $DE \perp AE$,

故可建立如图所示的空间直角坐标系



所以 $D(1,0,0)$, $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $E(0,0,0)$, $\overrightarrow{AB} = (0,1,-1)$,

因为 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA} = (-1,0,1)$, 所以 $F = (-1,0,1)$, 所以 $\overrightarrow{AF} = (-1,0,0)$,

设平面 DAB 的一个法向量 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + z_1 = 0 \\ y_1 - z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x_1 = 1 \Rightarrow \vec{m} = (1, 1, 1),$$

设平面 ABF 的一个法向量 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ y_2 - z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y_1 = 1 \Rightarrow \vec{n} = (0, 1, 1),$$

$$\text{所以 } \cos\langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{设二面角 } D-AB-F \text{ 的大小为 } \theta, \text{ 所以 } \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\langle \vec{n}, \vec{m} \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{所以二面角 } D-AB-F \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

21. 双曲线 C 的中心为坐标原点, 左焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$, 离心率为 $\sqrt{5}$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 记 C 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $(-4, 0)$ 的直线与 C 的左支交于 M, N 两点, M 在第二象限, 直线 MA_1 与 NA_2 交于 P , 证明 P 在定直线上.

【参考解析】

(1) 因为左焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$, 离心率为 $\sqrt{5}$.

$$\text{所以 } c = 2\sqrt{5}, e = \frac{c}{a} = \sqrt{5} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a^2 = 4, \text{ 所以 } b^2 = c^2 - a^2 = 16,$$

$$\text{所以 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

(2) 显然斜率不为零, 故可设直线 MN 方程为 $x = my - 4$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my - 4 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \text{ 消 } x \text{ 得 } (4m^2 - 1)y^2 - 32my + 48 = 0, \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\text{则 } \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{32m}{4m^2 - 1} \\ y_1 y_2 = \frac{48}{4m^2 - 1} \end{cases}, \text{ 所以 } my_1 y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2),$$

$$\text{易知直线 } MA_1 \text{ 方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \text{ 直线 } NA_2 \text{ 方程为 } y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2),$$

$$\text{联立得 } \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{x_1 + 2}{x_2 - 2} = \frac{y_2(my_1 - 2)}{y_1(my_2 - 6)} = \frac{my_1 y_2 - 2y_2}{my_1 y_2 - 6y_1} = \frac{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) - 2y_2}{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) - 6y_1} = -\frac{1}{3},$$

$$\text{即 } \frac{x + 2}{x - 2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -1,$$

所以 P 在定直线上 $x = -1$ 上.

22.

(1) 证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$.

(2) 已知函数 $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$, 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.

【参考解析】江苏盐城张凡老师、安徽沐志伟老师提供

(1) 令 $g(x) = x - \sin x$, 所以 $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$,

$g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > g(0) = 0$, 故 $\sin x < x$, 右边得证;

令 $h(x) = x - x^2 - \sin x$, 则 $h'(x) = 1 - 2x - \cos x$,

令 $m(x) = 1 - 2x - \cos x$, 则 $m'(x) = -2 + \sin x < 0$,

所以 $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $h'(x) = m(x) < m(0) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $h(x) < h(0) = 0$, 故 $x - x^2 < \sin x$, 左边得证;

综上, 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$.

(2) 因为 $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$, 定义域为 $-1 < x < 1$,

所以 $f'(x) = -a \sin ax + \frac{2x}{1-x^2}$, 则 $f'(0) = 0$, 显然 $f'(x)$ 为奇函数,

$$f''(x) = -a^2 \cos ax + \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}, f''(x) = a^3 \sin ax + \frac{2(3+x^2)}{(1-x^2)^4},$$

①当 $a = 0$ 时, 显然 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 不满足;

②当 $a > 0$ 时, 取 $\frac{\pi}{2a}$ 与 1 的较小者为 m ,

则当 $0 < x < m$ 时, $\sin ax > 0$, 从而 $f''(x) > 0$,

所以 $f''(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递增, 所以 $f''(x) > f''(0) = 2 - a^2$,

1° 当 $2 - a^2 \geq 0$, $0 < a \leq \sqrt{2}$ 时, $f''(x) \geq 0$,

所以 $f'(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) > f'(0) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递增, 由奇函数性质知 $f(x)$ 在 $(-m, 0)$ 上单调递减,

故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 不满足;

2° 当 $2 - a^2 < 0$, $a > \sqrt{2}$ 时, $f''(x) < 0$, 而 $f''\left(\frac{\pi}{2a}\right) > 0$,

所以 $f''(x)$ 在 $(0, m)$ 上有唯一的零点 x_1 ,

所以当 $0 < x < x_1$ 时, $f''(x) < 0$, 当 $x_1 < x < m$ 时, $f''(x) > 0$,

考虑到 $f'(x)$ 为奇函数, 所以 $f'(x)$ 在 $(-x_1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, x_1)$ 上单调递减,

故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 故满足;

③当 $a < 0$ 时, 令 $-a = t (t > 0)$,

$$\text{则 } f'(x) = t \sin(-tx) + \frac{2x}{1-x^2} = -t \sin(tx) + \frac{2x}{1-x^2},$$

由前文分析知 $t > \sqrt{2}$, 即 $a < -\sqrt{2}$;

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.