

实施问题导学教学 培育数学核心素养

——以“简单几何体的外接球”复习课为例

518118 广东省深圳市坪山高级中学 鲍健 马珂 王蕊

摘要:在“简单几何体的外接球”复习课中,笔者在学生最近发展区设计问题链,对学习内容和问题解决进行导学和探究,促使学生主动学习,实现对知识和方法的归纳和提炼,落实对数学核心素养的渗透和培育.

关键词:问题导学;数学核心素养;建构主义;几何体;外接球

1 问题提出

《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出:“高中数学课程以学生发展为本,落实立德树人根本任务,培育科学精神和创新意识,提升数学学科核心素养.高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质.数学学科核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析.这些数学学科核心素养既相对独立又相互交融,是一个有机的整体.”^[1]

培养高中生数学核心素养的主阵地是数学课堂教学,需要在理论的指导和目标的引领下,通过课堂实验教学寻求培养学生数学核心素养的策略和方法.

笔者认为,教师首先要树立培养学生数学核心素养的意识,以发展学生数学学科核心素养为导向,将其渗透到课堂教学的设计、实施和评价全过程.其次,要在建构主义理论和马赫穆托夫问题教学论指导下,利用“五何”问题法创设合适的问题情境和问题链,将数学知识和核心素养内涵的承载和呈现问题化.最后,要通过问题导学激发学生思考和探究,让学生经历发现、分析、解决问题的过程,了解和应用研究问题的方法,体验主动构建知识新意义和框架的探究过程,引导学生把握数学内容的本质,潜移默化地培育其数学核心素养.

2 课例背景

高三数学微专题复习是围绕一个微主题进行研究和学习的教学活动,是二轮复习的重要形式,教学时长通常为两节课或更长.在教师的主导下,由易到难,由浅及深,在学生最近发展区设计问题链,引发学生思考,引导学生探究,在发现、分析和解决问题的过程中,主动重组和构建知识体系,总结提炼方

法,汲取数学核心素养养分.这其中,问题的设计和教学的掌控是数学核心素养落地生根、开花结果的关键所在,笔者运用“五何”问题法创设合适的问题情境和问题链,在本节课进行了实验教学.

2.1 课例简介

笔者所在学校与华南师范大学进行“1+1+2+N项目”合作,近期开展了名师工作室和市课题研讨课活动,高三复习课“简单几何体的外接球”是其中的一节.研讨的主题是在高三数学复习课堂上,教师如何创设问题情境,让学生经历发现、分析、解决问题的过程,落实对学生数学核心素养的渗透和培育.

2.2 教材分析

简单几何体外接球问题是立体几何的难点和高考重要考点.在研究简单几何体外接球问题时,外接球球心位置是关键,半径的求解是核心,这既要运用空间几何体和球的知识,更要关注构造几何体几何元素与球半径间的几何关系,这对解决问题尤为重要.

2.3 核心素养分析

在研究简单几何体外接球问题时,需要通过学生的直观想象,建立几何体与球相对的空间位置,想象或画出直观图,利用截面图来描述和构建几何关系,将空间几何问题转化为平面几何问题,对学生直观想象、逻辑推理和数学抽象等核心素养有较高要求.

2.4 学情分析

学生已经复习了空间几何体的结构特征和柱、锥、台、球的表面积和体积公式,对正方体和长方体较为熟悉,这是学生的已有认知.

国家级示范高中高三学生具有较强的好奇心、求知欲,感性认识较好,但空间想象力、抽象思维和自主探究问题的能力不强.学生遇到球类问题不能较好地进行直观想象,常陷入画不出几何体直观图

的窘境,无法实现空间到平面的转化,抓不住几何体的结构特征,确定不了球心位置,求解不得球半径.

2.5 教法学法

建构主义理论认为,学生只有参与教学和问题探究过程,才能建立自己的认知结构,才能灵活运用所学知识解决问题,才能发展、创新.^[2]

在建构主义理论指导下,根据本节课内容特点,在学生最近发展区设计问题链,由学生最熟悉的正方体和长方体的外接球问题出发,延展到能够补形转化为长方体外接球模型的问题,拓展到纬线圈模型中大圆和截面圆半径及棱柱外接球问题.通过问题导学教学法循序渐进,在师生交流、探讨、质疑、思辨、总结中,在探究、分析和解决问题的过程中,帮助学生完成知识体系的重组构建,渗透直观想象、逻辑推理和数学抽象等数学核心素养的培养.

3 教学回顾(节选)

3.1 研析真题,组合知识

教师课前遵循知识和问题链递进的原则设计问题导学学案,学生课前分组合作探究学案问题,教师提前收集学生自学疑难点,据此实时调整教学.

师生活动 教师展示近五年高考试卷涉及外接球的 10 道试题(如表 1 所示)并提问.这些问题有共同点吗?解决此类问题的关键点是什么?

设计意图:展示高考真题让学生认识到简单多体外接球问题是考频较高的考点.研析高考真题,较好地激发学生学习热情,并引导学生发现解决此类问题的关键是确定球心位置.

师生活动 教师提问,通过观察和分析上述高考试题,你觉得解决此类问题需要哪些知识?

正弦定理:在 $\triangle ABC$ 中,若角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径,则 $\frac{a}{\sin A} =$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

半径为 R 的球的体积公式: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

半径为 R 的球的表面积公式: $S = 4\pi R^2$.

多面体的外接球:在空间中,如果一个定点到一个简单多面体的所有顶点的距离都相等,那么这个定点就是该简单多面体的外接球球心.

设计意图:学生自主整理储备知识,构建知识网络结构,引导其将问题抽象成问题模型.

3.2 探究问题,构建模型

探究 1 基础模型——长方体的外接球

问题 1 长方体的外接球的球心是其体对角线的_____.

(1)如图 1,长方体同一顶点 A 出发的三条棱长分别为 $AB = a, AD = b, AA_1 = c$,则它外接球的半径 R 为_____;

(2)正方体棱长为 a ,则它外接球的半径 R 为_____.

师生活动 教师提出问题.球心位置具有什么几何性质?怎样找到这样的定点?学生易知长方体体对角线的中点到长方体各顶点距离相等,它就是长方体的外接球球心,体对角线 A_1C 即为球直径.

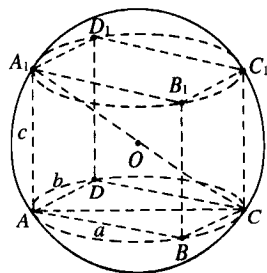


图 1

表 1

2020 年		2019 年		2018 年		2017 年		2016 年	
题号	分值	题号	分值	题号	分值	题号	分值	题号	分值
2020 年新课标高考数学Ⅱ卷文科第 11 题	5 分	2019 年新课标高考数学Ⅰ卷理科第 12 题	5 分	2018 年新课标高考数学Ⅲ卷理科第 10 题、文科第 12 题	5 分	2017 年新课标高考数学Ⅰ卷文科第 16 题	5 分	2016 年新课标高考数学Ⅱ卷理科、文科第 4 题	5 分
						2017 年新课标高考数学Ⅱ卷文科第 15 题	5 分		
2020 年天津市高考数学第 5 题	5 分					2017 年新课标高考数学Ⅲ卷理科第 8 题、文科第 9 题	5 分	2016 年新课标高考数学Ⅲ卷理科第 10 题、文科第 11 题	5 分
							2017 年天津市高考理科数学第 10 题		

长方体外接球半径 $R = \frac{A_1C}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$, 正

方体外接球半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

设计意图: 设置问题链引导学生探究和掌握长方体的外接球模型及外接球半径公式, 为解决复杂问题打下模型和方法基础.

探究 2 化归转化——可补形为长方体或正方体的几何体外接球

问题 2 (2019 新课标高考数学 I 卷理-12 改编)

已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA=2, PB=PC=1$, 且 PA, PB, PC 两两垂直, 求球 O 的体积.

师生活动 学生审题、思考和讨论, 由 PA, PB, PC 两两垂直联想到教室物理空间——墙角模型, 可将其补形成长方体, 再利用探究 1 的结论即可解答.

设计意图: 递进设置问题, 应用化归和转化思想, 将可补形为长方体的几何体外接球问题转化为长方体的外接球问题, 拓宽数学模型适用范围, 渗透数学抽象.

拓展练习 1 已知三棱锥的各条棱长均为 1, 求其外接球的表面积.

师生活动: 学生对如何定位三棱锥外接球一筹莫展, 教师提出问题导学. 能否找到与之相关的正方体?

学生虽熟悉正四面体, 但将正四面体补形为正方体并不易, 引导学生利用知识储备反其道而行之, 在正方体中构造正四面体. 如图 2, 三棱锥 B_1-ACD_1 即为正四面体, 故该题可补形正方体后再解决.

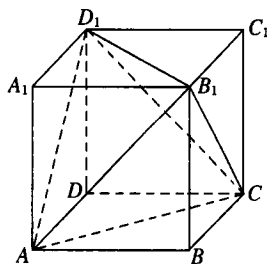


图 2

设计意图: 突破只有三条棱两两垂直的三棱锥才能补形为长方体或正方体的思维定势, 练习了补形法.

问题 3 按照拓展练习 1 的思路, 哪些几何体可以补成长方体? 你说出全部了吗? 你能在长方体中构造出怎样的几何体? 如果我们在长方体的上底面选择一个点 P , 如图 3, 在下底面任选三点, 那么有哪些常见的可补形为长方体的三棱锥? 有这样的棱柱和四棱锥吗?

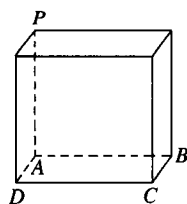


图 3

师生活动 学生动手尝试, 讨论后以小组展示的方式公布探究成果. 教师追问, 如

果我们不限定在上底面取点 P , 又会怎样?

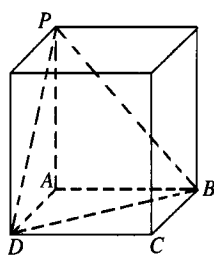


图 4-1

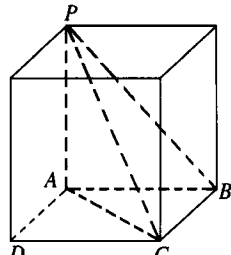


图 4-2

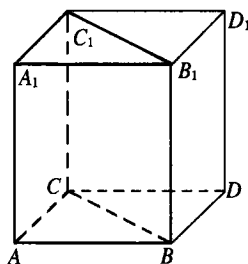


图 4-3

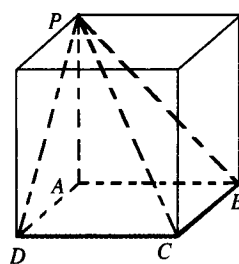


图 4-4

(1) AB, AP, AD 两两垂直 (墙角, 如图 4-1 所示); (2) 鳖臑 (四个面都是直角三角形, 如图 4-2 所示); (3) 底面为直角三角形的直三棱柱 (如图 4-3 所示); (4) 阳马 ($PA \perp$ 面 $ABCD$, $ABCD$ 为矩形, 如图 4-4 所示).

设计意图: 对不常见的三棱锥进行补形较为困难, 此处转化思路, 若能掌握在长方体中能构造哪些三棱锥、四棱锥和棱柱, 则能较好地解决需将几何体补形为长方体的问题.

师生活动 教师介绍相关数学传统文化, 如《九章算术·商功》提到的“斜解立方, 得两堑堵. 斜解堑堵, 其一为阳马, 一为鳖臑” (如图 5-1、图 5-2 所示).

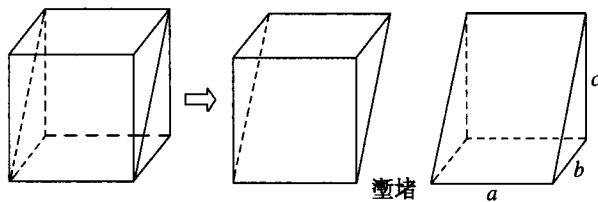


图 5-1

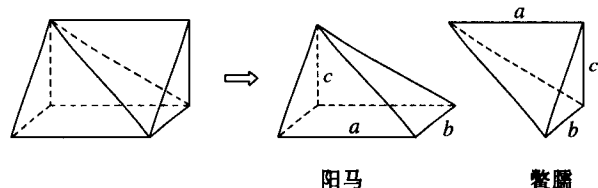


图 5-2

设计意图: 教师介绍相关传统文化知识, 约 2000 年前中国的数学专著《九章算术》中就此有相关阐述, 增强学生的民族自信心和自豪感.

探究 3 球中圆——纬线圈模型

问题 4 如图 6,球的一个截面圆的圆心为 O' ,思考以下问题.

(1)设球心为 O ,则直线 OO' 和圆 O' 所在的平面的关系为_____;

(2)记截面圆 O' 半径为 r ,球心 O 到截面圆圆心 O' 距离 $OO'=d$,则球的半径 $R=$ _____.

师生活动 教师提出问题.用平面截球,得截面圆,如何确定截面圆的位置和大小?学生独立思考解答问题.

设计意图:球中截面是将空间问题转化为平面问题常用的图形,教师引导学生抓住三个几何量 r, R, d 建立几何关系 $R^2=r^2+d^2$,构建纬线圈模型.这是至关重要的,渗透对学生空间想象和数学抽象能力的培养.

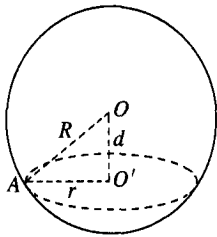


图 6

问题 5(2017 新课标高考数学Ⅲ卷理-8,文-9)如图 7,已知圆柱的高为 1,它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上,则该圆柱的体积为()

- A. π B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

师生活动 教师提出问题:如何画出一个内接于球的圆柱?学生动手作图后发现,利用两个全等且平行的纬线圈即可作出一个内接于球的圆柱.

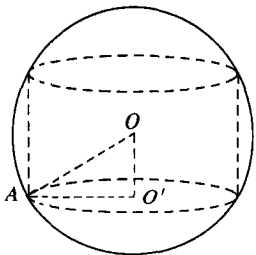


图 7

设计意图:利用纬线圈模型研究圆柱的外接球,深化学生对纬线圈模型的认识,提升其空间想象力.

拓展练习 2(2010 新课标高考数学Ⅰ卷理-10)设三棱柱的侧棱垂直于底面,所有棱的长都为 a ,顶点都在一个球面上,则该球的表面积为()

- A. πa^2 B. $\frac{7}{3}\pi a^2$
C. $\frac{11}{3}\pi a^2$ D. $5\pi a^2$

问题 6 如何画出一个内接于球的直三棱柱?怎样确定其外接球球心的位置?

师生活动 教师引导学生利用已掌握的知识和方法解决新问题,学生研讨后发现三棱柱的上下底面三角形外接圆可转化为互相平行的两个纬线圈,直三棱柱的外接球问题则可转化为圆柱外接球问题(如

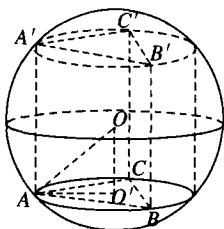


图 8

图 8 所示),故可借助问题 5 的方法求解.

设计意图:将直棱柱的外接球问题转化为圆柱的外接球问题,用已知解决未知,通过问题导学,深化学生对转化思想和抽象模型的认识.

4 教学后记

后现代教学理念认为:“教学过程主要是学生主动学习和建构的过程.”^[3]建构主义理论认为:“学习是在教师指导下的、以学生为中心的学习,教师是意义建构的帮助者、促进者,学生是信息加工的主体,是意义的主动建构者.”^[2]本节课中,教师主导课堂教学,采用问题导学教学方法,通过层层递进的问题链指引学生学习,学生主动参与教学,突出学生经历探究、发现、总结和建构模型的过程,落实培养学生数学核心素养的目标.

4.1 创设“五何”问题,践行问题导学

笔者利用祝智庭教授和闫寒冰博士在 4MAT 模式基础上拓展而提出的“五何”问题设计法,创设合适的问题情境和问题链.

4.1.1 “由何”

“由何”通常指以 From 引导的问题,它可以作为情境的依附对象,强调与事物对象相关的各种情境要素的追溯与呈现.^[4]

本节课的简单几何体的外接球问题较为繁杂,高中阶段不可泛而谈之,需在学生认知范围或最临近发展区内设置问题.本节课的所有问题都来自几何体的组合体知识和高考试题的考查点,其研究的内容、范围和难度都以课程标准和近五年的相关高考试题为标准,实现知识点负载的学生层次思维和核心素养的考查和培养.

4.1.2 “是何”

“是何”通常指以 What 引导的问题,主要涉及事实性知识的回忆与再现,或者是通过说明、解说、转述来阐明某种事实性的意义,它的解决通常对应着获取事实性的知识.^[4]

本节课伊始时,教师引导学生整理和审视储备知识的问题,为后续问题解决做好准备.

4.1.3 “为何”

“为何”通常指以 Why 引导,对问题的回答进行恰当准确的解释和推理,指向一些表示目的、理由、原理、法则、定律和逻辑推理的问题,它的解决通常对应着获取原理性的知识.^[4]

问题 1、问题 4 和问题 5 的设置引导学生建立长方体和纬线圈模型,是本节课重要而坚实的基础,帮助学生获得原理性的知识和方法.

4.1.4 “如何”

“如何”通常指以 How 引导,指向一些表示方

法、途径与状态的问题,主要侧重于关注各类过程与活动中关于技能、流程性的知识解答,通常蕴含于人们的技能与实践流程之中,它的解决通常对应着获取策略性的知识.[4]

问题2的设置帮助学生面对纷繁复杂问题时,利用转化的思想,将未知问题转化为已知问题,以不变应万变.

4.1.5 “若何”

“若何”通常指以 What...if...引导的问题,侧重于要求学习者推断或思考如果原有问题或事件的各种要素和属性发生了相应变化时,会产生什么样的新问题和新结果.此类问题复杂多变,易于产生思维迁移,通过解决若何问题,易于使学习者获得创造性的知识.[4]

问题6的设置给学生制造了一定的困难,三棱柱外接球直观图较难画,教师只画截面图,学生难以理解和掌握.教师引导学生突破三棱柱本身,利用纬线圈模型探究三棱柱底面的外接圆,使问题得到较好解决,实现了知识和思维的迁移,创造性地解决了一类问题.

4.2 开拓逆向思维,培育思维品质

面对问题3的小问(1)“按照拓展练习1的思路,哪些几何体可以补成长方体”,学生能得到一些答案,但可能会局限于三条棱两两垂直.教师的追问“你说出全部了吗?”会给学生造成较大困扰,在此基础上教师抛出第二个问题“你能在正方体中构造出怎样的几何体?”开拓学生逆向思维,把还原转化为构造.为了不使学生的思路过于开放,教师设置具体问题情境“如果我们先在长方体的上底面选择一个点P,如图所示,在下底面任选三点,那么有哪些常见的可补形为长方体的三棱锥?”使学生有的放矢,进而再拓展到“有这样的棱柱和四棱锥吗?”

教师利用问题引导和促使学生逆向思维,学生思路由寻找哪些可补成长方体的几何体,转变为在长方体中能构造哪些几何体,学生获得创造性解决问题的思维方法,逻辑推理和空间想象核心素养得到培养.

4.3 学生主动探究,培养核心素养

4.3.1 教师的主导作用与学生主体地位

本节课中教师的主导体现在三方面.一是问题的设置主导着课堂教学的进程和研究方向.二是在学生困惑时,教师适时给予启发、引导和帮助.三是在总结阶段,教师汇集学生探究成果,适当纠偏、提炼和提升.

学生的主体地位主要体现在以下三方面.一是在“问题导学”中,学生是在探究和解决问题过程中完成学习的,深入教学的过程之中.二是几乎所有的

认识和结论都是学生在解决问题过程中发现和总结的.三是学生经历了学习过程中的困惑、艰辛和喜悦等情感体验,这是教师教学的结果,更是学生自主学习的经历.

4.3.2 学生经历问题解决和核心素养培育过程

本节课的课堂是开放式的,共需解决五个问题,在教师的主导和问题导学下,通过生生间合作探究、师生对话、学生思辨,帮助学生树立善于思考、总结和归纳的科学精神,实现培养关键能力和核心素养的目的.

面对问题1,学生基本能够自主解决.一是因为长方体和正方体较为简单,二是学生已掌握求球心位置的方法.学生能够先找到长方形ABCD的外接圆的圆心即面对角线的交点,过圆心作面ABCD的垂线,则垂线上任何一点到ABCD的顶点距离都相等,只需在垂线上找一点使其到其他点的距离等于到A点的距离,此点即为球心.学生自主得出最基础的长方体模型.

问题2是一道高考试题改编题.解题伊始,学生并没有想到要补形为长方体,而是利用找外接球球心常规方法,构造平面几何关系解出球半径.此通法是值得肯定的,教师在此基础上提出是否有更好的方法,引导学生结合问题1的研究成果重新思考问题,发现可通过补形将问题转化为长方体的外接球问题,展示出化归这一数学思想方法的魅力.

问题3对学生有一定的挑战性,教师的适时引导和帮助是很重要的,其中逆向逻辑推理尤其难能可贵,具体过程不再赘述.

问题4中的球中圆即纬线圈模型学生应已掌握,只需强调 d 和 r 分别用来确定截面圆在球中的位置和大小,让学生掌握 $R^2 = r^2 + d^2$ 即可.教师引导学生将问题5抽象成纬线圈模型,轻松解决问题,渗透数学抽象核心素养.

问题6中棱柱的外接球问题是难点,直观图不好画出,学生感觉到棘手.教师及时出手相助,引导学生认识到用平面截球都能得到圆面,帮助学生联想到纬线圈模型,培养学生感性直观想象和理性逻辑推理能力.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准:2017年版[S].北京:人民教育出版社,2017.
- [2] 温彭年,贾国英.建构主义理论与教学改革——建构主义学习理论综述[J].教育理论与实践,2002(5):17-22.
- [3] 李方.后现代教学理念探微[J].教育研究,2004(11):35-40.
- [4] 闫寒冰.学习过程设计:信息技术与课程整合的视角[M].北京:教育科学出版社,2005.