

零点存在性定理中的“取点”问题

361000 厦门市海沧区教师进修学校附属学校 陈志康

361026 厦门双十中学海沧附属学校 陈雨瑾

摘要:函数零点个数问题一直是高考的热点,解决这一问题主要围绕函数单调性和零点存在性两方面进行.单调性通过导函数的符号即可说明,零点存在性则要熟练应用零点存在性定理进行适当“取点”.笔者通过对试题的全面剖析,提炼解决此类问题的一般方法.

关键词:零点存在性定理;取点

在解决零点存在性问题时,常常需要结合图形来分析,但由于学生没有学习过函数极限,无法分辨一些函数图像在无穷远处或间断点处的性态.如果想要严格说明零点的存在,只能借助零点存在性定理,即若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一条连续不断的曲线,并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$,则存在 $c \in (a, b)$,使得 $f(c) = 0$,适当“取点”来说明函数值的正、负.在一些试卷公布的答案中,并没有对如何“取点”进行特别说明,很多学生不能明白其精髓所在.正确“取点”要求具备较高的数学核心素养,以此为抓手提升学生的逻辑推理、数学运算能力正合适不过,如果能解决这些问题,对学生今后学习“极限”这部分的内容也会有所帮助.笔者阐述解决这些问题过程中获得的感悟.

例 1(2017 全国卷 I 理-21) 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点,求 a 的取值范围.

小问(1) 分析: 可知 $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1$,结合式子的结构特征,因式分解为 $f'(x) = (2e^x + 1)(ae^x - 1)$,接下来只需考虑 $ae^x - 1$ 的符号问题即可得到结果.

小问(2) 解法 1: 由小问(1)可知,若 $f(x)$ 有两个零点,则 $a > 0$,且 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减,在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 有两个零点的必要条件是 $[f(x)]_{\min} = f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$,结合单调性可得当 $0 < a < 1$ 时,有 $[f(x)]_{\min} < 0$,即 $f(x)$ 有两个零点的必要条件是 $0 < a < 1$,又 $f(-2) = ae^{-4} + (a-2)e^{-2} + 2 > -2e^{-2} + 2 > 0$,故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 有一个零点. 设正整数 n_0 满足 $n_0 > \ln(\frac{3}{a} - 1)$,则 $f(n_0) = e^{n_0}(ae^{n_0} + a - 2) - n_0 > e^{n_0} - n_0 > 0$. 由于 $\ln(\frac{3}{a} - 1) > -\ln a$,因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 有一个零点,综上 a 的取值范围为 $(0, 1)$.

评注:本题涉及零点存在定理中如何“取点”,学生不明白如何想到令“ $x = -2$ ”和“ $n_0 > \ln(\frac{3}{a} - 1)$ ”,笔者阐述相关思路.

注意到 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x, 0 < a < 1$,目标是在 $(-\infty, -\ln a)$ 上找到 x_0 ,使得 $f(x_0) > 0$,由于 $ae^{2x_0} > 0$,只要让 $(a-2)e^{x_0} - x_0 > 0$,限定 $x_0 < 0$,由于 $(a-2)e^{x_0} - x_0 > a - 2 - x_0 > -2 - x_0$,令 $-2 - x_0 \geq 0$,得 $x_0 \leq -2$,于是 $(a-2)e^{x_0} - x_0 > a > 0$,所以 $f(-2) > 0$. 由于 $0 < a < 1, -\ln a > 1$,所以 $-2 \in (-\infty, -\ln a)$,符合条件.

另一个目标是在 $(-\ln a, +\infty)$ 上找到 n ,使得 $f(n) > 0$,即 $ae^{2n} + (a-2)e^n - n > 0$,由于 $e^n > n$,所以 $ae^{2n} + (a-2)e^n - n > ae^{2n} + (a-2)e^n - e^n = e^n(ae^n + a - 3) > 0$,得 $n > \ln(\frac{3}{a} - 1)$,于是当设正整数 n_0 满足 $n_0 > \ln(\frac{3}{a} - 1)$ 就有 $f(n_0) > 0$,经检验, $\ln(\frac{3}{a} - 1) \in (-\ln a, +\infty)$,符合条件.

事实上,“取点”是经过适当“放缩”计算得出的,常见的不等式如当 $x > 0$ 时,有 $e^x > x > \ln x$. 笔者总结得出以下“取点”技巧.

(1) 借助一些常见不等式对超越式放缩,放缩后的不等式容易解出.

(2) 不等式放缩的方向要与所需函数值的正负一致,如上述找 n 的取值需要 $f(n) > 0$,对 $f(n)$ 中一些式子放缩要往“ $>$ ”的方向进行.

(3) 检验不等式的解是否在需求范围内. 使得 $f(x) > 0$ 的自变量的值并不是只有 -2 和 $\ln \frac{3-a}{a}$,如 $f(-1) = ae^{-2} + (a-2)e^{-1} + 1 > ae^{-2} + \frac{1}{2}(a-2) + 1 = ae^{-2} + \frac{1}{2}a > 0$,如何“取点”取决于放缩的程度. 需要说明的是,在寻找使得 $f(x) > 0$ 的自变量的值时,尽可能选取较为简单的结构,体现

数学的简洁美.

小问(2)解法 2:由小问(1)可知 $a > 0$. 参变分离, 令 $f(x) = 0$, 得 $\frac{2e^x + x}{e^{2x} + e^x} - a = 0$, 令 $g(x) = \frac{2e^x + x}{e^{2x} + e^x} - a, g'(x) = \frac{(2e^x + 1)(1 - x - e^x)e^x}{(e^{2x} + e^x)^2}$. 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x < 0$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $[g(x)]_{\max} = 1 - a$. $g(x)$ 有两个零点的必要条件是 $[g(x)]_{\max} = 1 - a > 0$, 即 $0 < a < 1$.

下证充分性(只需在 y 轴左侧找一点的函数值为负, 在 y 轴右侧找一点的函数值也为负, 例如找到 $x_0 < 0$ 使得 $g(x_0) < 0$).

由于当 $x < 0$, 有 $e^{2x} + e^x > 0, 2e^x < 2$, 取 $x_0 = -2$ 就有 $g(-2) = \frac{2e^{-2} - 2}{e^{-4} + e^{-2}} - a < 0$, 符合条件.

当 $x > 0$, 要想有 $\frac{2e^x + x}{e^{2x} + e^x} - a < 0$, 由 $x < e^x$ 得 $\frac{3e^x}{e^{2x} + e^x} - a = \frac{3}{e^x + 1} - a \leq 0$, 解出 $x \geq \ln(\frac{3}{a} - 1)$, 于是 $g(\ln(\frac{3}{a} - 1)) < 0$, 符合条件, 所以 a 的取值范围为 $(0, 1)$.

教学启示:教学时应归纳出已知函数零点个数, 求参数范围通常有直接讨论函数零点(解法 1)和参变分离(解法 2)这两种策略. 解法 1 中导函数结构虽然含参, 但形式较为简单. 解法 2 的优势在于参变量分离, 使得构造出的函数不再含有参数, 为后续研究带来方便, 同时新构造出的函数形式也较为复杂. 在面对不需要严格推理证明的选择、填空题时, 可以让学生结合图形分析, 如参变分离法可以考虑 $f(x)$ 的零点即为函数 $y = \frac{2e^x + x}{e^{2x} + e^x}$ 与 $y = a$ 图像有两个交点, 只需画出草图(如图 1 所示)进行分析即可得到正确答案.

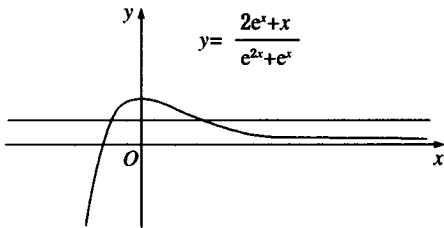


图 1

例 2 (2015 全国卷 I 文-21) 设函数 $f(x) = e^{2x} - a \ln x$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点个数.
- (2) 略.

分析:依题意得 $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{a}{x}$, 若 $a \leq 0$, 无

零点; 若 $a > 0, f'(x)$ 在定义域内单调递增. 现在的目标就是在定义域上找点 m, n , 满足 $f'(m) < 0, f'(n) > 0$. 由函数结构特征, $f'(a) = 2e^{2a} - 1 > 0$ (把含参项变为常数项, 因此可取 $x = a$), 所以关键在于找到 m , 使得 $f'(m) < 0$.

教师在教学过程中最好从图像的角度切入分析, $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{a}{x}$ 的零点即函数 $y = 2e^{2x}$ 与 $y = \frac{a}{x}$ 的交点, 这两类函数是学生比较熟悉的, 图 2、图 3 分别对应了 $a < 0$ 和 $a > 0$ 时的图像.

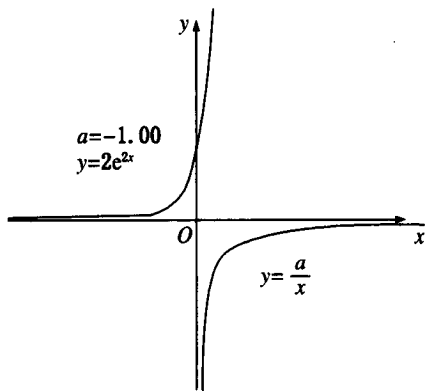


图 2

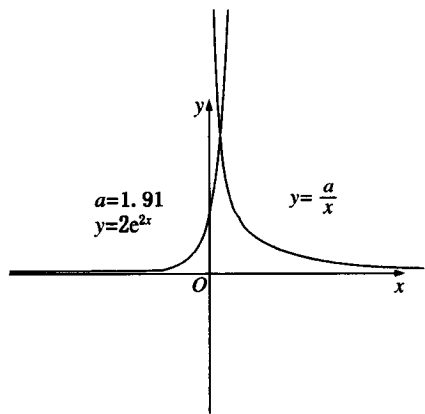


图 3

从函数的增长趋势看, m 应当足够小, 越接近 0 越好. 如取 $m = \frac{a}{2}, f'(m) = 2e^a - 2 = 2(e^a - 1) > 0$, 并不合适. 为了使结果比较“好看”, 继续缩小 m 的值, 取 $m = \frac{a}{4}, f'(m) = 2e^{2m} - 4$, 令 $f'(m) = 2e^{2m} - 4 < 0$, 得 $m < \ln 2, \frac{\ln 2}{2} \in (0, \ln 2)$, 只需取 $m = \min\{\frac{a}{4}, \frac{\ln 2}{2}\}$, 就有 $2e^{2m} < 4, -\frac{a}{m} < -4$, 因此 $f'(m) = 2e^{2m} - \frac{a}{m} < 0$, 问题得到解决.

评注:从参变量分离的角度一样能解决此问题,

$$2e^{2x} - \frac{a}{x} = 0 (x > 0), \text{ 即 } 2xe^{2x} - a = 0 (x > 0) \quad ①.$$

方程①的解也可以看作是 $g(x) = 2xe^{2x} - a$ 在 $[0, +\infty)$ 上的零点(扩大定义域), 而当 $x \geq 0$ 时, 注意到 $g'(x) = 2(2x+1)e^{2x} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, $g(0) = -a < 0, g(a) = 2ae^{2a} - a > 2a - a > 0$, 所以 $g(x) = 2xe^{2x} - a$ 在 $[0, +\infty)$ 上有唯一零点, 问题得到解决. 在这个过程中化归思想起了很大的用处, 原本函数的端点无法代入, 从而无法确定符号, 将函数延拓为 $g(x) = 2xe^{2x} - a$, 使这个问题得到圆满解决.

教学启示: 对于“取点”的策略, 除了借助不等式放缩以外, 还可以归纳得出以下两种方法.

方法 1: 把含参项消去变为常数项, 如上面分析取 $x = a$.

方法 2: 想要说明存在 x_0 使 $f(x_0) - h(x_0) < 0$, 可借助中间量 α , 说明 $f(x_0) < \alpha, h(x_0) > \alpha$ 即可.

在这里可用方法 2 找 m , 目标是 $2e^{2m} - \frac{a}{m} < 0$, 即 $2e^{2m} < \frac{a}{m}$, 限定 $0 < m < 1$, 于是 $2e^{2m} < 2e^2$, 只需 $\frac{a}{m} > 2e^2$, 得 $0 < m < \frac{a}{2e^2}$, 显然 $\frac{a}{16} \in (0, \frac{a}{2e^2})$, 取 $m = \min\{1, \frac{a}{16}\}$ 符合题意.

例 3(2020 福州质检理-21) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{ex}{2} - ax, g(x) = \frac{x-4a}{x}$.

(1) 略. (2) 当 $a > 0$ 时, 函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 恰有三个不同的零点, 求实数 a 的取值范围.

分析: 依题意得 $h(x) = \ln \frac{x}{2} - ax + \frac{4a}{x}, h'(x) = \frac{-ax^2 + x - 4a}{x^2}$, 只需讨论 $y = -ax^2 + x - 4a$ 的符号.

当 $0 < a < \frac{1}{4}, \Delta = 1 - 16a^2 > 0$, 设 $y = -ax^2 + x - 4a$ 的两个零点为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 由韦达定理可以判断 $0 < x_1 < 2 < x_2$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, x_1), (x_2, +\infty)$ 上单调递减, 在 (x_1, x_2) 上单调递增, 又 $h(2) = 0$, 所以 2 是 $h(x)$ 的零点, 而 $h(x_2) > h(2) = 0, h(x)$ 的图像如图 4 所示(只要在 $(2, +\infty)$ 上找到 m , 使得 $h(m) < 0$ 即可).

$h(x) = \ln \frac{x}{2} - ax + \frac{4a}{x}$, 当 x 足够大时, $y = ax$ 的“增长趋势”相较 $y = \ln x, y = \frac{4a}{x}$ 大, 因此这里选择 m 要尽可能大, 当 $x > 2, \frac{4a}{x} < 2a < \frac{1}{2}$, 所以 $h(x) <$

$\ln \frac{x}{2} - ax + \frac{1}{2}$, 令 $p(x) = \ln \frac{x}{2} - ax + \frac{1}{2}$, 考虑到 $m = \frac{1}{a}$ (构造出常数), $p(m) = \ln \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} > \ln 2 - \frac{1}{2} > 0, m$ 取值不符要求, 说明 m 还不够大. 继续尝试取 $m = \frac{1}{a^2}$, 则 $p(m) = \ln \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2}$, 令 $t = \frac{1}{a}$, 则 $y = \ln \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}, t > 4$, 则 $y' = \frac{2-t}{t} < 0$, 所以 $y_{\max} = \ln 8 - 4 + 0.5 < \ln e^3 - 3.5 = -0.5 < 0$, 因此 $h(m) < \ln \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2} < 0$, 因为 $\frac{1}{a^2} > 2$, 所以存在 $x_0 \in (2, +\infty)$ 使得 $h(x_0) = \ln \frac{x_0}{2} - ax_0 + \frac{4a}{x_0} = 0$, 又 $h(\frac{4}{x_0}) = \ln \frac{2}{x_0} - \frac{4a}{x_0} + ax_0 = 0$, 即 $x_0, \frac{4}{x_0}$ 均为 $h(x)$ 的零点, 所以当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, 函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 恰有三个不同的零点.

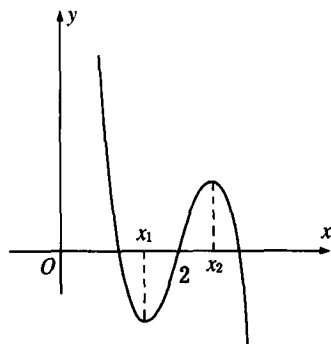


图 4

评注: 上面利用到构造常数法、放缩法寻求 m , 这里可提供另一种放缩方式. $p(x) = \ln \frac{x}{2} - ax + \frac{1}{2}$, 对 $\ln \frac{x}{2} = 2\ln \sqrt{\frac{x}{2}} < 2\sqrt{\frac{x}{2}}$ 放缩, 利用不等式 $\ln t < t$, 于是 $p(x) = \ln \frac{x}{2} - ax + \frac{1}{2} < 2\sqrt{\frac{x}{2}} - ax + \frac{1}{2}$, 设 $t = \sqrt{\frac{x}{2}}, x > 2$, 则 $p(x) < 2t - 2at^2 + \frac{1}{2}$, 令 $2t - 2at^2 + \frac{1}{2} = 0$ 得 $t = \frac{1 + \sqrt{1+a}}{2a} < \frac{1+3}{2a}$, 则 $t = \frac{2}{a}$ 时, 有 $2t - 2at^2 + \frac{1}{2} < 0$, 令 $m = \frac{8}{a^2}$, 得 $p(\frac{8}{a^2}) < 0$.

当找到 $x_0 \in (2, +\infty)$ 使得 $h(x_0) = 0$ 后, 并不需要在 $(0, x_1)$ 找另一个零点, 原因是该零点与 x_0 有特殊的数量关系, 往往在对数函数、反比例函数、正比例函数三者叠加的函数中零点会存在这样的关系.

(下转第 37 页)

(四) 开放性问题探究, 激活学生的数学思维

开放性问题的解题过程蕴含更多的创造性, 对考查学生的创造、想象和探索能力有独特的作用.

教学片段 5

如图 14, 已知 $AB \parallel CD$, $A \xrightarrow{\quad M \quad} B$
点 M, N 分别在 AB, CD 上,
点 P 是平面内的一个动点,
且点 P 不在 AB, CD, MN $C \xrightarrow{\quad N \quad} D$
上, 联结 MP, NP , 请探究
 $\angle P$ 与 $\angle AMP, \angle CNP$ 之
间的数量关系, 并说明理由.

图 14

这道几何探索题激起了学生的探究兴趣, 学生通过自主探索发现问题的思维和方法, 利用几何画板得出点 P 的可能位置.

三、经验与总结

通过上述教学实施案例的情境创设、核心问题和体验式活动的引领, 学生借助添加平行线和构造截线, 利用三角形内角和定理、三角形外角的性质, 结合化归的数学思想, 将未知转化为已知. 上述几种方法的区别在于运用的知识点和构图不同. 在解决平行线的相关问题时, 截线与平行线总是如影随行. 当出现平行线时, 需要添加截线, 当出现截线时, 则需要去寻找平行线, 从而利用平行线间同位角、内错角、同旁内角的运算关系解决问题.

笔者回顾总结这节课的磨课过程、专家评课意见、课后学生反馈数据, 受到很大启发. 教学中, 如果通过创设情境、设置数学体验活动引入核心问题, 再补充子问题进行完善, 找到合适的支点, 就能推动学生主动地进行数学学习, 走向高效. 这个支点就是新的知识逻辑发展与学生思维发展的契合处. 找到它的前提是要把握数学知识与学生思维的本质, 用好它的关键就是在此基础上巧妙

创设适合学生特点的数学体验活动. 让数学活动立足于数学知识本质, 紧扣住学生的思维本质, 从而创设合适的体验活动.

笔者创设体验活动, 让学生自主探究、思考辨析、合作交流、归纳总结. 如在学生自主探索平行线间角关系的规律时, 利用直观图形, 每个学生都在 Pad 上通过 GeoGebra 几何软件测量平行线间三个角的大小, 然后建立这三个角之间的联系, 教师引导学生观察、测量、计算, 最后通过推理论证观点的正确性. 解决这一问题的经验与方法是让学生充分体验与摸索, 这是进一步探究的基础.

再如学生在小组合作运用平行线性质的定理构造平行线与截线设计方案时, 在使用 Pad 作图及计算机演示的过程中, 学生已经在思考如何证明结论的正确性, 但是学生一致认为根据现有的平行线性质的定理无法证明这道题. 因此, 有学生提出能否通过添加辅助线解决问题, 而如何添加辅助线是本题的难点, 也是本节课的重点. 为了让学生自主解决问题, 教师通过设立核心问题, 再辅以体验式活动, 开拓学生的思维.

从这次公开课中, 笔者了解到对于探究课教学, 通过创设情境激活学生的数学思维发展十分必要, 感悟到寻找学生从“被动”变“主动”的支点的重要性.

参考文献

[1] 思维智汇. 胡卫平: 为素养而教, 我们需要思维型教学 [EB/OL]. https://www.sohu.com/a/407933185_100194097.
[2] 黄力. 开放初中数学教学, 激活学生创新思维[J]. 中学教学参考, 2015(32).
[3] 钟启泉. 基于核心素养的课程发展: 挑战与课题[J]. 全球教育展望, 2016(1).
[4] 缪瑞芳. 创设数学教学情境 有效提高课堂教学[J]. 教育教学论坛, 2010(32).

(上接第 27 页)

教学启示: 在函数的教学过程中, 可以让学生对几类初等函数的增长趋势进行比较, 更有利于解决这些问题, 当 x 足够大时, 增长趋势从大到小的函数分别是指数函数、幂函数(正指数)、对数函数. 上文对 $\ln \frac{x}{2} = 2\ln \sqrt{\frac{x}{2}} < 2\sqrt{\frac{x}{2}}$ 进行变形时, 正是考虑到这一点.

“取点”的过程是一个不断试错的过程, 学生需要经历观察、猜想、计算、证明等思维活动, 这些过程能发展学生的数学运算、逻辑推理能力. 在教学中,

教师要教会学生从数学的本质出发, 追求通性通法, 有效的解题是有专注的选择和有进展的试错. 教师也可以在日常教学过程中强化学生对常见函数增长趋势的认识, 让学生走向更高的层次.

参考文献

[1] 王芝平, 李亚斌. 函数零点看端详 异号连续细思量 [J]. 数学通报, 2019(6).
[2] 高用. 有法放缩 精准“取点”[J]. 中学数学教学, 2021(3).