例谈数列递推在求概率中的应用

杨高云
（临澧县第一中学　湖南　常德　415200）

一些较复杂的概率问题与计数问题一样，可用递推法求解.设事件A发生的概率为P_1，若在A发生的条件下发生B的概率为P_2，则事件A、B同时发生的概率为$P_1 \cdot P_2$.根据这一事实，结合概率的加法与乘法公式构建递推关系，是递推法求解的基本思路.下面举例说明.

一、递推模型$P_n=rP_{n-1}+(1-r)P_{n-2}$

例1　从原点出发的某动点M，按照向量$\vec{a}=(1,0)$移动的概率为$\frac{3}{5}$，按照向量$\vec{b}=(2,0)$移动的概率为$\frac{2}{5}$，设可到达点$(n,0)$的概率为P_n.

（1）求概率P_1、P_2；

（2）求P_{n+2}与P_n、P_{n+1}的关系，并证明数列$\{P_{n+2}-P_{n+1}\}$是等比数列；

（3）求P_n.

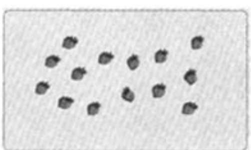
解：（1）$P_1=\frac{3}{5}$，$P_2=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{19}{25}$.

（2）因为到达$(n+2,0)$处的事件包括两种情况：先到达$(n+1,0)$处再移到$(n+2,0)$处；先到达$(n,0)$处再移到$(n+2,0)$处，故$P_{n+2}=\frac{3}{5}P_{n+1}+\frac{2}{5}P_n$，所以$P_{n+2}-P_{n+1}=-\frac{2}{5}(P_{n+1}-$

有多少把，看谁的眼力最准.（师出示图，学生估计）

提问：要想知道有多少把伞，只要怎样就行了？（数一数）

介绍方法：为了不漏数，我们还可以边数边做标记，我们一起来数一数.（师生一起数到10）有10把可以怎样？（我们就可以用一个大的圈把它们圈起来，电脑演示）继续！一共有多少把伞？你估计对了吗？



(2)草莓图

还有一幅草莓图，你来估计一下有多少个草莓，比一比这次谁的眼力准！学着老师的方法来数一数有多少个.

展示学生的方法，表扬估计对的小朋友.

5.生活应用

你在生活中见过今天学的这些数吗？在哪见过？（学生举例）老师也收集了几张图片，读一读这些图上面的数.（师出示图）

(1)绿灯（图1）

提问：你在哪见过这样的图标？（激发兴趣，并向学生进行遵守交通规则的安全教育）

这里的19表示什么意思？接下来绿灯会显示多少呢？（如出现20，让学生联系生活中等红绿灯的情景）

图1

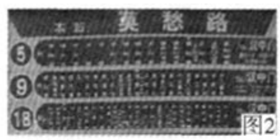


图2

(2)公交站牌（图2）

提问：在哪见过？（公交站台）经过“莫愁路”的有哪些车？

(3)米袋（图3）

提问：见过这样的图吗？（学生联系生活说一说）这里的千克是表示有多重的单位.

图3

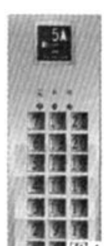


图4

(4)电梯图（图4）

提问：这是哪儿？思考：如果你在5楼，你想去15楼，电梯是往上还是往下呢？如果想到1楼，电梯往哪？

六、总结延伸

课后延伸：其实生活中还有很多这样的数呢，课后请大家在我们美丽的校园里找一找并和其他小朋友说一说.

（责任编辑　徐旺）

P_n),故$\{P_{n+2}-P_{n+1}\}$是首项为P_2-P_1,公比为$-\frac{2}{5}$的等比数列.

(3)由上有$P_n-P_{n-1}=(P_2-P_1)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-2}$,

即$P_n-P_{n-1}=\frac{4}{25}\left(-\frac{2}{5}\right)^n\cdot\frac{25}{4}=\left(-\frac{2}{5}\right)^n$,

所以$P_{n-1}-P_{n-2}=\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1},\cdots,P_2-P_1=\left(-\frac{2}{5}\right)^2$.

累加有:$P_n-P_1=\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{2}{5}\right)^n$,

故$P_n=1-\frac{2}{5}+\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{2}{5}\right)^n$.

所以$P_n=\frac{5}{7}-\frac{5}{7}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}$.

点评:本题层层诱导,追根源,构建递推,体现了分类与分步的思想.另外,无须用到较多的数列递推知识,其中$a_{n+1}=\alpha a_n+\beta a_{n-1}$,$\alpha+\beta=1$是一种特殊的递归形式.

二、递推模型$P_n=rP_{n-1}$.

例2 $\frac{n(n+1)}{2}$个数排成三角形数表,每一行中最大的数分别为$M_1,M_2,\cdots,M_n$,求满足$M_1<M_2<M_3<\cdots<M_n$的概率.

解:表中共有n行,记n行时满足题意的概率为P_n,依次类推,先从简单入手.$n=1$时,显然$P_1=1$;$n=2$时,2行3个数,将最大的数排在第2行有C_2^1种,余下2个数全排有A_2^2种,故$P_2=\frac{C_2^1\cdot A_2^2}{A_3^3}=\frac{2}{3}$.

这给我们提供了思路.对于n行,知$\frac{n(n+1)}{2}$个数中最大数必在第n行中,第n行中其余$n-1$个数可以任取;余下$\frac{n(n+1)}{2}-n$个数中最大的数必在第$n-1$行中,同样第$n-1$行中其余元素可以任取,顺此,我们可以完成符合要求的整个数表,但计算概率时比较麻烦.

实际上,倒过来看,完成n行的数表可分为2步,第一步是完成第n行,概率为$P=\frac{C^{n-1}_{\frac{n(n+1)}{2}-1}}{C^{n}_{\frac{n(n+1)}{2}}}$,第二步是完成余下的$n-1$行,概率为$P_{n-1}$,故$P_n=\frac{C^{n-1}_{\frac{n(n+1)}{2}-1}}{C^{n}_{\frac{n(n+1)}{2}}}P_{n-1}$.又$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$,所以上式可化为:$P_n=\frac{2}{n+1}P_{n-1}$,

所以$P_{n-1}=\frac{2}{n}P_{n-2},\cdots,P_2=\frac{2}{3}P_1$.

故累积有:$P_n=\frac{2^n}{(n+1)!}$.

点评:该题递推关系的建立,突出体现了分步思想,对应着概率的乘法公式;另外,初始值的确立,简单问题的探索,提供了解题思路,值得回味.

三、递推模型$P_{n+1}=rP_n+q$.

例3 一质点在$x=0$,$x=1$两处之间移动,并满足:当质点在$x=0$处时,1秒后必移动到$x=1$处;质点在$x=1$处时,1秒后分别以$\frac{1}{2}$的概率停留在$x=1$处或移动到$x=0$处,今质点在$x=1$处,求10秒后质点在$x=1$处的概率.

解:设n秒后质点在$x=0$处概率为b_n,n秒后质点在$x=1$处概率为a_n,依次类推,则$a_n+b_n=1$对任意$n\in\mathbf{N}_+$成立,且$a_n=b_{n-1}+a_{n-1}\cdot\frac{1}{2}$,所以$a_n=1-a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-1}$,即$a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+1$.

易得:$3a_n-2=-\frac{1}{2}(3a_{n-1}-2)$.

又$a_1=1$,所以$a_n=\frac{1}{3}\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

当$n=10$时,有$a_{10}=\frac{683}{1024}$.

点评:此类递推关系较为隐蔽,但引进双数列,理解起来非常自然.以上仅举数例,足见递推在求解较复杂概率中的作用,且与数例知识关联,是命题的一大亮点.

(责任编辑 李闯)

The problem solver may do creative work even if he does not succeed in solving his own problem; his effort may lead him to means applicable to other problems,Then the problem solver may be creative indirectly be leaving a good unsolved problem which eventually leads others to discovering fertile means.

即使在解某一道题时,解题者未获成功,他也可能做了有独创性的工作;他的努力可能使他得到适用于解决其他问题的工具.此外,他可能留下一个很好的未解决问题,这个问题最终能使其他人发现更有成效的解题手段.这样,他间接地作出了独创性的贡献.

——波利亚