例析借用递推数列求解一类概率题

◉广东省惠州市第一中学　方志平

数列与概率都是高中数学的重要内容，在高中各级各类数学考试中频频出现数列与概率的交汇题.其中一类题借用数列中的递推关系，用有限的方法解决无限的问题，这也是解决一些概率问题行之有效的好方法.本文采撷了几道与递推法相关的概率试题，权当抛砖引玉.

一、$P_n=aP_{n-1}+b$型

例1　(2017年全国高中数学联赛广西壮族自治区预赛试题)一名篮球队员进行投篮练习，若第n次投篮投中，则第$n+1$次投篮投中的概率为$\frac{2}{3}$；若第n次投篮不中，则第$n+1$次投篮投中的概率为$\frac{1}{3}$.若该队员第1次投篮投中的概率为$\frac{2}{3}$，则第4次投篮投中的概率为______.

解：设该队员投中第$n-1$个球的概率为P_{n-1}，投不中的概率为$1-P_{n-1}$，则投进第n个球的概率为：

$P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}(1-P_{n-1})(n\geqslant 2)$，

所以$P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(P_{n-1}-\frac{1}{2})$，

则有$P_n-\frac{1}{2}=\left(P_1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

又$P_1=\frac{2}{3}$，所以$P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n}$，故$P_4=\frac{41}{81}$.

评注：根据已知条件虽然可依次求得概率P_2,P_3,P_4，但比较繁琐.考虑第$n+1$次结果受第n次结果的影响，且前后次之间的概率P_n与P_{n+1}存在着递推关系，于是联想到借助递推思想方法求解更为简捷.

例2　(2014年全国高中数学联赛山东省预赛试题)甲、乙两人轮流掷一枚骰子，甲先掷，规定：若甲掷到1点，则甲继续掷，否则由乙掷；若乙掷到3点，则乙继续掷，否则由甲掷.两人始终按此规则进行，则第n次是甲掷的概率$P_n=$______.

解：甲掷到1点(乙掷到3点)概率为$\frac{1}{6}$，甲未掷到1点(乙未掷到3点)概率为$\frac{5}{6}$，设第n次由甲掷的概率为P_n，则乙掷的概率为$1-P_n$，第一次由甲掷的概率$P_1=1$，故第二次由甲掷的概率$P_2=\frac{1}{6}$，于是第$n+1$次由甲掷的概率为

$P_{n+1}=\frac{1}{6}P_n+\frac{5}{6}(1-P_n)=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}P_n$，即$P_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}\left(P_n-\frac{1}{2}\right)$，

所以$P_n-\frac{1}{2}=\left(P_1-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，所以$P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

评注：本题的解题切入点是从题设的信息中探索出相邻两次抛掷的概率间的递推关系.于是得出甲能掷第$n+1$次取决于甲第n次掷到1点或乙第n次未掷到3点，由于这两事件是互斥的，于是有$P_{n+1}=\frac{1}{6}P_n+\frac{5}{6}(1-P_n)$.

例3　(2012年全国高中数学联赛天津市预赛试题)电脑每秒钟以相同的概率输出一个数字1或2，将输出的前n个数字之和被3整除的概率记为P_n.

证明：(1)$P_{n+1}=\frac{1}{2}(1-P_n)$；

(2)$P_{2012}>\frac{1}{3}$.

证明：(1)这n个数字共有2^n种可能情形，设其中数字之和被3整除的有x_n种，则不被3整除的有2^n-x_n种，对于$n+1$个数字的情形，如果其和被3整除，则前n个数字之和不被3整除；反之，对于前n个数字之和不被3整除的每种情形，都有唯一的第$n+1$个数字可使前$n+1$个数字之和被3整除，于是有$x_{n+1}=2^n-x_n$.(＊)

又$P_n=\frac{x_n}{2^n}$，所以$x_n=2^nP_n$，$x_{n+1}=2^{n+1}P_{n+1}$，代入(＊)式，

则$2^{n+1}P_{n+1}=2^n-2^nP_n$，故$P_{n+1}=\frac{1}{2}(1-P_n)$.

(2)由$P_{n+1}=\frac{1}{2}(1-P_n)$得：$P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$，由于第1次输出的数字是1或2，都不能被3整除，所以$P_1=0$，则数列$\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$是首项为$P_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}<0$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比

数列.所以$P_{2012}-\frac{1}{3}=\left(P_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{2011}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2011}>0$,

故$P_{2012}>\frac{1}{3}$.

评注:本题关于概率P_n的递推关系比较隐蔽,但从事件发生的情况种数分析思考,不难理解递推关系$x_{n+1}=2^n-x_n$,然后利用$P_n=\frac{x_n}{2^n}$,将其转化为$2^{n+1}P_{n+1}=2^n-2^nP_n$,特别注意$x_1=0$,所以$P_1=0$,从而问题便迎刃而解.

二、$P_{n+1}=aP_n+bP_{n-1}$型

例4 (2017年全国高中数学联赛贵州省预赛试题)掷一枚硬币,每次出现正面得1分,出现反面得2分,反复掷这枚硬币,则恰好得n分的概率为______.

解:(1)由于事件得分为$n+2$是由以下两个互斥事件组成:

①事件“得分为$n+1$分,再出现一次正面向上得1分”,此时得分为$n+2$分的概率为$\frac{1}{2}P_{n+1}$;

②事件“得分为n分,再出现一次反面向上得2分”,此时得分为$n+2$分的概率为$\frac{1}{2}P_n$.

于是$P_{n+2}=\frac{1}{2}P_{n+1}+\frac{1}{2}P_n$,即$P_{n+2}-P_{n+1}=-\frac{1}{2}(P_{n+1}-P_n)$,

所以$P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(P_2-P_1)(n\geqslant 2)$,

又$P_1=\frac{1}{2}$,$P_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

所以$P_n-P_{n-1}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$,

所以$P_n=P_1+(P_2-P_1)+(P_3-P_2)+\cdots+(P_n-P_{n-1})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

评注:本题也可以从问题的反面思考,利用“$P_n=aP_{n-1}+b$型”求解.设得n分的概率为P_n,得不到n分的情况只有先得$n-1$分,再掷出反面,概率为$\frac{1}{2}P_{n-1}$,所以$1-P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}$,即$P_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_{n-1}-\frac{2}{3}\right)$.又因为$P_1=\frac{1}{2}$,所以$P_n-\frac{2}{3}=\left(P_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\Rightarrow P_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,故$P_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,此解法新颖,富有创意.

例5 从原点出发的某质点M,按向量$\boldsymbol{a}=(0,1)$移动的概率为$\frac{2}{3}$,按向量$\boldsymbol{b}=(0,2)$移动的概率为$\frac{1}{3}$,设M到达点$(0,n)$的概率为P_n,求P_n.

解:M到达点$(0,n)$有两种情形:

(1)从点$(0,n-1)$按向量$\boldsymbol{a}=(0,1)$移动到点$(0,n)$,此时概率为$\frac{2}{3}P_{n-1}$;

(2)从点$(0,n-2)$按向量$\boldsymbol{b}=(0,2)$移动到点$(0,n)$,此时概率为$\frac{1}{3}P_{n-2}$.

因为这两种情形是互斥的,故有

$P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}(n\geqslant 3)$,

即$P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{3}(P_{n-1}-P_{n-2})(n\geqslant 3)$.易知$P_1=\frac{2}{3}$,$P_2=\frac{7}{9}$,

所以数列$\{P_n-P_{n-1}\}$是以$P_2-P_1=\frac{1}{9}$为首项,$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列,于是

$P_n-P_{n-1}=\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n(n\geqslant 2)$.

所以$P_n=P_1+(P_2-P_1)+(P_3-P_2)+\cdots+(P_n-P_{n-1})$

$=\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$=\frac{2}{3}+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

评注:本题背景新颖,既是用向量“包装”的概率题,又是与递推法相关的数列题,三者联袂,不但开拓了学生的视野,培养了学生的创新思维,而且还彰显了数学的无穷魅力!

综上,本文列举的几个例子是与数列有关的概率题,从中可以看出递推法是解决此类问题的简洁方法,甚至有些问题也只能用递推法求解.上述各例也向我们展示了用递推法求解的解题过程,实现了由局部已知到全局未知的探索,由抽象思维到形象思维的融合,这对激发学生的数学学习兴趣和培养创新能力都大有裨益! H