基于抽象素养培养的变式教学探究

——以2018年高考全国卷Ⅰ理科第16题为例

324022 浙江省衢州第三中学 汤小青 陈 旭

摘 要:笔者以一道高考三角函数求最值问题为背景进行变式教学设计,从单调性、基本不等式、柯西不等式、琴生不等式、数形结合等角度进行研究,构建三角函数最值问题的知识结构和体系,引导学生探究问题的数学本质,形成一般性结论,拓展思维的层次,从而实现数学抽象素养的提升.

关键词:数学抽象素养;变式教学

变式教学的教学策略包括概念性变式和过程性变式.概念性变式是指构建合适的变异维度,让学生体验学习对象的关键方面,形成对概念的本质理解.[1]过程性变式旨在提供适当的铺垫,帮助学生形成学习对象与已有知识的内在、合理的联系.两种变式策略共存互补、相互促进,分别在不同情境、不同阶段发挥作用.数学抽象素养的形成包含概念、规则的获得,命题和模型的提出,知识结构和体系的形成.通过概念性变式教学,学生能从多角度体验学习对象的数学本质,更好地获得概念和规则;通过过程性变式,学生能更合理地构建知识的内部联系,形成知识结构和体系.因此,变式教学的开展更有利于抽象素养在课堂教学中的落地生根.笔者以2018年高考全国卷Ⅰ理科第16题为例,从变式教学层面进行抽象素养培养的探究.

一、原题再现

原题(2018全国卷Ⅰ理-16) 已知函数$f(x)=2\sin x+\sin 2x$,则$f(x)$的最小值为________.

二、变式教学设计

为便于不等式的使用,将原题变为以下变式.

变式 已知函数$f(x)=2\sin x+\sin 2x$,则$f(x)$的最大值为________.

(一)单调性开路

变式解法1:函数$f(x)=2\sin x+\sin 2x$周期为2π,故只需求解一个周期内的最大值即可.求导可得$f'(x)=2\cos x+2\cos(2x)=2\cos x+4\cos^2 x-2=2(\cos x+1)(2\cos x-1)$.故当$x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$时,$f'(x)\geqslant 0$;当$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$时,$f'(x)\leqslant 0$.故函数$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

变式解法2:由万能公式可得$\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$,$\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$,故$y=f(x)=2\sin x+\sin 2x=$

$$\frac{4\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{4\tan\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{8\tan\frac{x}{2}}{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)^2}.$$

令$t=\tan\frac{x}{2}$,则$y=g(t)=\frac{8t}{(1+t^2)^2}$,那么$g'(t)=\frac{8-24t^2}{(1+t^2)^3}$,则函数$y=g(t)$在区间$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上$y'<0$,在区间$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上$y'>0$.所以$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$时,函数$y=g(t)=\frac{8t}{(1+t^2)^2}$的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

变式1 求函数$y=f(x)=2x\cdot(1+\sqrt{1-x^2})$的最大值.

解法1:换元,令$x=\sin\theta\left(\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$,则$y=2\sin\theta(1+\cos\theta)=2\sin\theta+\sin(2\theta)\left(\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$,后续参见变式解法1.

解法2:直接求导进行求解,$y'=f'(x)=\dfrac{2(\sqrt{1-x^2}+1)(2\sqrt{1-x^2}-1)}{\sqrt{1-x^2}}$,后续解答过程略.

变式2 求函数$y=f(x)=\sqrt{1-x^2}(2+x)$的最大值.

变式2解法与变式1类似,此处略.

设计意图:利用所学知识寻求普适性的方法是解题教学的首要任务.利用导数求解函数单调性,进而解决最值问题,是求解所有可导函数最值问题的通法.从最值的层面更好地构建导数在函数问题中的价值.

(二)应用不等式初探

变式解法3:$f(x)=2\sin x+\sin 2x=2\sin x\cdot(1+\cos x)$,则 $f^2(x)=4\sin^2 x(1+\cos x)^2$,那么结合基本不等式可得 $f^2(x)=\frac{4}{3}(3-3\cos x)(1+\cos x)^3\leqslant\frac{4}{3}\left(\frac{(3-3\cos x)+3(1+\cos x)}{4}\right)^4=\frac{27}{4}$(当 $3-3\cos x=1+\cos x$,即 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时取等号),所以 $f(x)_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$(当 $\cos x=\frac{1}{2}$,$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取得).

或者结合 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$,$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$,那么 $f^2(x)=\frac{4}{3}(3-3\cos x)(1+\cos x)^3$ 可以化为 $f^2(x)=\frac{4}{3}\left(6\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)^3\leqslant\frac{4}{3}\left[\frac{6\sin^2\frac{x}{2}+3\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)}{4}\right]^4=\frac{27}{4}$.

变式3 求函数 $y=f(x)=x(\sqrt{1-x^2})^3$ 的最大值.

解法1:换元,令 $x=\sin\theta\left(\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$,则 $y=\sin\theta\cos^3\theta$,利用类似变式解法3的方法处理.

解法2:利用基本不等式求解,$f^2(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2\cdot(1-x^2)^3\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3x^2+3(1-x^2)}{4}\right)^4=\frac{27}{256}$(当 $x^2=\frac{1}{4}$ 时取得最大值).

变式4 求函数 $y=f(x)=(\sqrt{1-x^2})x^2$ 的最大值.

解法1:换元,令 $x=\sin\theta\left(\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$,则 $y=\sin^2\theta\cos\theta$.

解法2:利用基本不等式求解,$f^2(x)=\frac{1}{2}\cdot(2-2x^2)x^4\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2-2x^2+x^2+x^2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$(当 $x^2=\frac{2}{3}$ 时取得最大值).

设计意图:从基本不等式的角度,利用四阶基本不等式 $abcd\leqslant\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4(a>0,b>0,c>0,d>0)$,构造和为定值,进而求得乘积的最大值.利用三角恒等变换将题中和的形式转化为乘积形式,再结合不等式进行处理,理顺了三角函数中的不等式使用思路.

(三)应用不等式再探

变式解法4:$f^2(x)=4(\sin x+\sin x\cos x)^2$

$=4\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cdot\sqrt{2}\cos x\right]^2$

$\leqslant 4\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x\right)\left(\frac{4}{3}\sin^2 x+2\cos^2 x\right)$

$=4\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x\right)\left(-\frac{2}{3}\sin^2 x+2\right)$

$=4\left(-\frac{1}{3}\sin^4 x+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{3}{2}\right)\leqslant\frac{27}{4}$(第一个柯西不等式取得等号的条件和第二个二次型函数最值取得等号的条件相同,为 $\sin^2 x=\frac{3}{4}$).

变式解法5:$f(x)=2\sin x+2\sin x\cos x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+2\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\sin x\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cos x\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}+\sin^2 x\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^2 x+\sqrt{3}\cos^2 x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$(当 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取得等号).

变式5 求函数 $y=f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$ 的最值.

解:$f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x=2(\sin x\cos x+2\cos x\sin 2x)\leqslant 2\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 2x}=2\sqrt{\cos^2 x+4\cos^2 x(1-\cos^2 x)}=\sqrt{4\cos^2 x(5-4\cos^2 x)}\leqslant\frac{5}{2}$(柯西不等式等号和二次函数最大值条件一致,即 $\cos^2 x=\frac{5}{8}$).

设计意图:从"$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cdot\sqrt{2}\cos x$"乘积和的结构出发,结合柯西不等式进行系数的构造,使得前后的等号一致;从"$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x$","$2\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\sin x\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cos x$"乘积的形式,分别构造基本不等式,进行系数的构造使得前后的等号一致.从结构出发,发现不同的思考角度,多角度揭示问题的本质.进一步强化利用不等式解决最值问题的基本思路.

(四)数形结合显威

变式解法6:$f(x)=2\sin x+\sin 2x=2\sin x\cdot(1+\cos x)$,$P(\cos\theta+1,\sin\theta)$ 为 $C:(x-1)^2+y^2=1$

上的点,只需求 $x\cdot y=c$ 的最大值.由图1,令 $y=h(x)=\frac{c}{x}$,则 $h(x)$ 与圆相切时 c 最大.P 点切线的斜率为 $k_p=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$,$h'(x)=-\frac{c}{x^2}=-\frac{y}{x}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}$,所以 $y'=-\frac{c}{x^2}=-\frac{y}{x}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$,解得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$($\cos\theta=-1$舍去,此时 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$),故 $c_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,$f(x)_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

变式6 求函数 $y=f(x)=\sin(2x)+2\sin x+2\cos x+2$ 的最大值.

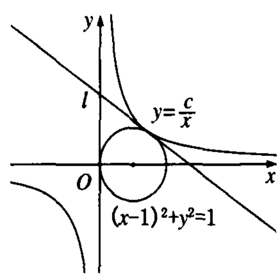

图1 相切求最值

解:$f(x)=\sin(2x)+2\sin x+2\cos x+2=2(\sin x+1)\cdot(\cos x+1)$,$P(\cos\theta+1,\sin\theta+1)$ 为 C:$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上的点,求 $x\cdot y=c$ 的最大值.令 $y=h(x)=\frac{c}{x}$,则 $h(x)$ 与圆相切时 c 最大,P 点 $(\cos\theta+1,\sin\theta+1)$ 切线的斜率为 $k_p=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$,$h'(x)=-\frac{c}{x^2}=-\frac{y}{x}=-\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta+1}$,所以 $y'=-\frac{c}{x^2}=-\frac{y}{x}=-\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta+1}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$,解得 $\sin\theta=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$($\cos\theta=-1$ 舍去),故 $f(x)_{\max}=3+2\sqrt{2}$.

变式解法7:$y=f(x)=2\sin x+\sin 2x=2\sin x\cdot(1+\cos x)$,构造单位圆的内切等腰三角形,如图2,设 $\angle BOD=x$,则 $DO=\cos x$,$CD=1+\cos x$,$BD=\sin x$,$AB=2\sin x$,所以 $S_{\triangle ABC}=\sin x(1+\cos x)$,所以要求函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ 的最大值等价于求 $S_{\triangle ABC}$ 面积的最大值.设 $\angle COB=\alpha$,$\angle AOB=\beta$,$\angle AOC=\gamma$,则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$,$(\alpha+\beta+\gamma=2\pi)$,由琴生不等式可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\leqslant\frac{1}{2}\cdot 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$(当 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2}{3}\pi$ 时取等号),$f(x)_{\max}=2S_{\triangle ABC\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

设计意图:此题利用"$\sin\theta(1+\cos\theta)$"构造圆 C:$(x-1)^2+y^2=1$,利用"$2\sin x(1+\cos x)$"构造单位圆的内切三角形的面积.以三角函数的特性为媒介,从图形角度诠释三角表达的内涵,利用图形转化解题方向.数形结合是高中数学的重要思维,通过多角度探究,学生经历多维度思考,提升数形结合的思维层次.

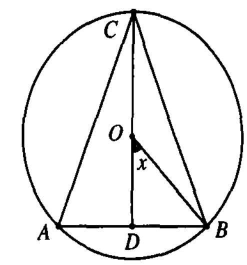

图2

(五)高观点立意

变式解法8:因为 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 为上凸函数,由琴生不等式可得 $y=f(x)=2\sin x+\sin 2x=\sin x+\sin x+\sin 2x=\sin(\pi-x)+\sin(\pi-x)+\sin 2x\leqslant 3\sin\left(\frac{\pi-x+\pi-x+2x}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$($\pi-x=\pi-x=2x$,即当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时取等号).当 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,$f(x)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$,故函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上最大值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的最小值必然大于 -1,因为函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ 是奇函数,所以在 $(-\pi,0)$ 上的最大值小于 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,由周期性可得函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

变式7 求函数 $y=f(x)=3\sin x+\sin 3x$ $\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right)$ 的最大值.

解:因为 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 为上凸函数,由琴生不等式可得 $y=f(x)=3\sin x+\sin 3x=\sin x+\sin x+\sin x+\sin 3x=\sin(\pi-x)+\sin(\pi-x)+\sin(\pi-x)+\sin 3x\leqslant 4\sin\left(\frac{3(\pi-x)+3x}{4}\right)=2\sqrt{2}$($\pi-x=3x$,即当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时取等号).

变式8 求函数 $y=f(x)=2\sin(3x)+3\sin(2x)$ $\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right)$ 的最大值.

解:因为 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 为上凸函数,由琴生不等式可得 $y=f(x)=2\sin(\pi-3x)+3\sin(2x)=\sin(\pi-3x)+\sin(\pi-3x)+3\sin(2x)\leqslant 5\sin\left(\frac{2(\pi-3x)+6x}{5}\right)=5\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$($\pi-3x=2x$,即 $x=\frac{\pi}{5}$ 时取等号).

设计意图:2019年人教版高中数学新教材必修一第三章复习参考题中就有"求证:若 $g(x)=x^2+$

(下转第14页)

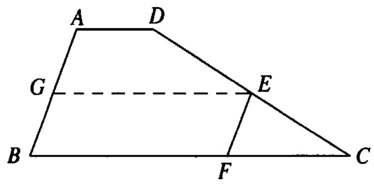

图 3-2

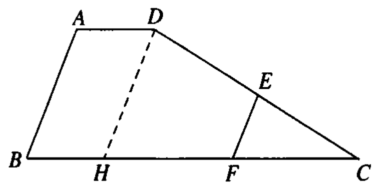

图 3-3

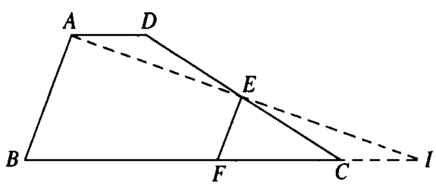

图 3-4

一题多解的实质是以不同的论证方式反映条件和结论的本质联系，这种变式在几何题中尤其多.这种变式训练要求学生从不同角度思考问题、解决问题，既能开阔思路，又能引发学生学习的兴趣，培养学生的发散性思维.

教材习题是全面评价学生在知识技能、数学思维、问题解决和情感态度等方面综合能力的重要依据，也是考查学生数学核心素养的有效载体，值得深入研究.教材是教师备课、教学的行动指南，教师对教材的理解透彻与否、对教材的使用科学与否直接关系到教学效果.教师可以通过适当改变习题的条件、结论、图形、方法等，引导学生反思教材习题的变式训练，帮助学生巩固所学知识、拓宽思路，举一反三，逐步提高数学思维能力.对教材习题进行变式训练必须先明白习题本身蕴含的知识点以及设计意图，再结合学生实际情况进行变式，让变式训练更具针对性，使教学内容更深入学生的最近发展区.

参考文献

[1] 上海市教育委员会.上海市中小学数学课程标准(试行稿)[S].上海:上海教育出版社,2004.

[2] 夏飞,戴春明.变式训练的方法与技巧[J].中国数学教育(初中版),2010(21).

[3] 安国钗.推陈出新精彩纷呈——对一道作业题的开发、引申与挖掘[J].中国数学教育(初中版),2011(19).

[4] 蔡凤.浅谈例题设计的“变之道”[J].中国数学教育(初中版),2011(17).

[5] 顾方东.巧用图形变换,妙解中考试题[J].中国数学教育(初中版),2010(9).

(上接第10页)

$ax+b$，则 $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$”这一与函数凹凸性紧密结合的题型.从函数的凹凸性到琴生不等式，利用琴生不等式解决函数的最值问题，为函数最值的知识结构增加了重要的组成部分，也可将琴生不等式的使用条件一般化为“$y=f(x)=a\sin(bx)+c\sin(dx)$，其中 $ab=cd$”.

三、反思与总结

(一)通过变式教学设计完善知识结构，形成知识体系

函数最值问题的知识结构和体系较为复杂，结合三角公式、三角函数可以实现形式的多变性，在多种形式的基础上融合多种方法，进而帮助学生更好地抽象出函数最值问题的知识结构和体系.从通法的角度利用导数研究单调性求最值，结合万能公式，再利用求导求最值；将基本不等式、柯西不等式的形式特点和三角函数的公式变形进行有机结合，让结构的形式和问题的实质相融合；利用问题的结构特征构造反比例函数和圆的相切、构造单位圆的内切三角形面积，让抽象的代数与直观的图形相融合；从函数的凹凸性观点，进一步揭示问题的实质.

(二)通过变式教学设计一题多解，抽象出问题的实质，提升思维品阶

数学核心素养水平的提升，思维能力的进阶，是一个有序的过程.通过合理的变式教学设计、多维度逐层深入的变式，学生经历由通性通法到多种不等式探究、再到数形结合、最后在高观点下立意的探究过程，在逐层深入的过程中逐步揭开问题的实质，不断提升数学核心素养水平，发展高阶思维.

(三)通过变式教学设计多题一解，抽象方法的内涵，形成一般性结论

在变式教学设计中，每一维度都设计多个变式，实现多题一解，使学生多角度认知方法，形成一般性的结论.

参考文献

[1] 鲍建生,等.变式教学研究[J].数学教学,2003(1):1-11.

[2] 谢小翔.全方位多角度深层次——2015年安徽省高考数学理科第18题的解法探究及思考[J].中学数学,2015(9):61-62.