构造向量求数列的和

江苏省梁丰高级中学
215600 赵颖颖
江苏省张家港市罗建宇名教师工作室

摘　要：向量是沟通几何与代数的桥梁，构造向量可推导等差数列、等比数列的前 n 项和公式，在此基础上可求几类特殊数列的和.

关键词：向量；数列；求和

向量是沟通几何与代数的桥梁，是进一步学习和研究其他数学领域问题的基础[1]. 在中学教学实践中，向量常作为工具来解决几何问题，也能解决一些代数问题，向量的运用多见于等式、不等式、函数等问题（参见文[2]－文[9]）. 笔者构造向量求几类典型数列的和，作为向量在解决代数问题中的补充，用以倡导在高中数学知识间进行相互论证，发展数学学力.

一、构造向量推导等差数列前 n 项和公式

问题 1　设数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

解析：当 $d=0$ 时，易得. 下面推导当 $d\neq0$ 时的求和公式.

记 $\overrightarrow{OA_i}=(a_i,0)$，$\overrightarrow{OA_{i+1}}=\overrightarrow{OA_i}+(d,0)$，则 $\overrightarrow{OA_{i+1}}=(a_i+d,0)$，所以 $\overrightarrow{OA_{i+1}}^2-\overrightarrow{OA_i}^2=(a_i+d)^2-a_i^2=d(2a_i+d)$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OA_{i+1}}^2-\overrightarrow{OA_i}^2)=\sum\limits_{i=1}^{n}2da_i+\sum\limits_{i=1}^{n}d=2d\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+nd$，所以 $\overrightarrow{OA_{n+1}}^2-\overrightarrow{OA_1}^2=2d\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+nd$，所以 $(a_1+nd)^2-a_1^2=2d\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+nd$，所以 $2d\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=2a_1nd+n^2d^2-nd$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

评注：从向量的视角看，等差数列对应向量的加减法运算，问题 1 的解决是在构造向量的基础上，结合向量的模的计算得以推导等差数列前 n 项和公式. 类似地，利用上述对向量的模的计算方法，可以求数列 $\{n^m\}(m\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和，简析如下.

记 $\overrightarrow{OA_i}=(i,0)$，则 $\overrightarrow{OA_{i+1}}=(i+1,0)$，所以 $\overrightarrow{OA_{i+1}}^2-\overrightarrow{OA_i}^2=2i+1$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OA_{i+1}}^2-\overrightarrow{OA_i}^2)=2\sum\limits_{i=1}^{n}i+n$，所以 $\overrightarrow{OA_{n+1}}^2-\overrightarrow{OA_1}^2=2\sum\limits_{i=1}^{n}i+n$，所以 $(n+1)^2-1=2\sum\limits_{i=1}^{n}i+n$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$.

同理，$\overrightarrow{OA_{i+1}}^3-\overrightarrow{OA_i}^3=3i^2+3i+1$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OA_{i+1}}^3-\overrightarrow{OA_i}^3)=3\sum\limits_{i=1}^{n}i^2+3\sum\limits_{i=1}^{n}i+n$，所以 $\overrightarrow{OA_{n+1}}^3-\overrightarrow{OA_1}^3=3\sum\limits_{i=1}^{n}i^2+3\sum\limits_{i=1}^{n}i+n$，由 $\sum\limits_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$，得 $(n+1)^3-1=3\sum\limits_{i=1}^{n}i^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

类似地，依次构造 $\overrightarrow{OA_{i+1}}^m-\overrightarrow{OA_i}^m(m\in\mathbf{N}^*)$ 并利用二项式定理，可分别求数列 $\{n^3\}$，$\{n^4\}$…的前 n 项和.

二、构造向量推导等比数列前 n 项和公式

问题 2　设数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等差数列，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

解析：当 $q=1$ 时，易得. 下面推导当 $q\neq1$ 时的求和公式.

记 $\overrightarrow{OA_i}=(q^{i-1},0)$，则 $\overrightarrow{OA_{i+1}}=q\overrightarrow{OA_i}$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_{i+1}}=q\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_{n+1}}-\overrightarrow{OA_1}=q\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$，所以 $(q-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\overrightarrow{OA_{n+1}}-\overrightarrow{OA_1}$，故有 $(q-1)(\sum\limits_{i=1}^{n}q^{i-1},0)=(q^n-1,0)$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}q^{i-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_1q^{i-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$.

评注：从向量的视角看，等比数列对应向量的数乘运算，问题 2 的解决是在构造向量的基础上，结合向量相等（坐标相等）的概念得以推导等比数列前 n 项和公式. 类似地，利用上述对向量相等概念的理解，可求一类原先用“裂项”求和法求解的数列的前 n 项和，以最简单的数列 $\{\frac{1}{n(n+1)}\}$ 为例简析如下.

记 $\overrightarrow{OA_i}=(\frac{1}{i},0)$，则 $\overrightarrow{OA_{i+1}}=(\frac{1}{i+1},0)$，所以 $\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_{i+1}}=(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1},0)=(\frac{1}{i(i+1)},0)$，故有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_{i+1}})=\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{i(i+1)},0)$，则 $\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_{n+1}}$

$=(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)},0)$，所以$(1-\frac{1}{n+1},0)=(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)},0)$，即$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

三、构造向量求“等差×等比”数列前 n 项和

问题3　设数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，数列$\{b_n\}$是公比为q的等比数列，求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和.

解析:同上，这里只需解析当$q\neq 1$时的求和.

记$\overrightarrow{OA_i}=(a_i,0)$，$\overrightarrow{OB_i}=(b_i,0)$，且$\overrightarrow{OA_{i+1}}=\overrightarrow{OA_i}+(d,0)$，$\overrightarrow{OB_{i+1}}=q\overrightarrow{OB_i}$，则$\overrightarrow{OA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{OB_{i+1}}=q\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i}+q(d,0)\cdot\overrightarrow{OB_i}$，则有$\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{OB_{i+1}}=q\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i}+qd\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i}+\overrightarrow{OA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{OB_{i+1}}-\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}=q\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i}+qd\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，故$(q-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i}=\overrightarrow{OA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{OB_{i+1}}-\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}-qd\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，所以$(q-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=a_{n+1}b_{n+1}-a_1b_1-qd\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，即$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=\frac{a_{n+1}b_{n+1}-a_1b_1-qd\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}{q-1}$.

评注:问题3的解决常用经典的“错位相减法”求和，这里是在构造向量的基础上综合运用有关向量的线性表示，结合向量数量积运算求得“等差×等比”数列的前n项和公式.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准:2017年版2020年修订[S].北京:人民教育出版社,2020:25.

[2] 陈德山.向量在中学代数中的应用[J].数学通报,1987(9):20-21.

[3] 李锦昱,王海波.构造向量,巧证不等式[J].数学通讯,2002(20):11.

[4] 张定强.巧用向量的数性积解题举例[J].数学通报,2003(2):25-26.

[5] 李铁烽.构造向量证三元分式不等式[J].数学通报,2004(2):30-32.

[6] 廖冬云.构造平面向量,解决三角问题[J].数学通讯,2004(10):11.

[7] 聂文喜.构造向量证明课本不等式[J].数学通讯,2004(18):15.

[8] 王志进,程美.竞赛不等式的创新证法——向量内积法[J].数学通报,2005(4):53-54.

[9] 张国治.构造平面向量,妙解一个数学问题[J].数学通报,2007(11):51.

(上接第24页)

解题难点分析:小问(3)的问题设计是由“$f(x)$是$\{1\}$关联”的特征类比抽象到“$f(x)$是$\{2\}$关联”，进而由特殊到一般的思想，继续通过类比抽象得到问题“$f(x)$是$\mathbf{N}^*$关联”.由问题中的数字运算拓展到字母运算，其难点在于逻辑关系的导出与描述.

难点突破策略:通过由“$f(x)$是$\{1\}$关联”推理出“$f(x)$是$\{2\}$关联”的逻辑关系，不难得出“$f(x)$是$\{3\}$关联，$\{4\}$关联……”类比这样的递推关系，可以联系到数列中的递推关系，因此可以通过类比抽象的思想，应用数列中递推关系的表述方法来证明$f(x)$是$\mathbf{N}^*$关联.

在函数的性质中，函数的奇偶性、单调性、周期性等性质都可以尝试通过数学抽象达到理解内化的过程.以函数的奇偶性为例，关于偶函数定义中“对于任意的$x\in D$，都有$f(-x)=f(x)$”的理解，通过弱抽象可以表述为“定义域内的任意两个互为相反数的自变量，它们对应的函数值相等”，通过强抽象可以表述为“对于任意的$x_1,x_2\in D$，当$x_1+x_2=0$时，都有$f(x_1)=f(x_2)$”，这种抽象到x_1,x_2来定义的形式，可以与函数单调性的定义形式统一起来.用相同的x_1,x_2来定义不同的函数性质可以帮助学生体会这些性质的共性以及本质特征，启发学生的抽象思维.函数的性质本质上是由自变量和因变量的变化特征所体现出来，所以在表征抽象之后可以通过弱抽象帮助学生理解函数的本质，通过强抽象帮助学生用不同方式严谨而准确地表述函数性质.学生对于学习内容掌握的关键在于能够将所要研究的数学对象抽象到能够理解内化的文字语言、符号语言和图像语言.关于数学抽象、逻辑推理和数学建模，史宁中教授给出这样的理解:通过抽象，在现实生活中得到数学的概念和运算法则，通过推理得到数学的发展，然后通过模型建立数学与外部世界的联系.可以看出，无论是由现实生活到数学概念的抽象，还是在数学问题解决过程中的数学抽象思维，都体现了数学抽象作为数学素养的核心价值.

参考文献

[1] 吴晓红,谢海燕.基于学科核心素养的数学教学课例研究[M].上海:华东师范大学出版社,2019.

[2] 史宁中.数学思想概论:第一辑[M].长春:东北师范大学出版社,2008.

[3] 《数学辞海》编辑委员会.数学辞海:第六卷[M].太原:山西教育出版社,2002.