重视试题探究　促进深度学习

——由2019年高考概率压轴题研究说起

277101　山东省枣庄市第三中学　黄丽生
277101　山东省枣庄市永安镇中学　孙中会

摘　要:"深度学习"能够引导学生主动参与学习活动,使学生从单纯的、封闭式的、缺乏挑战性的活动,走向复杂的、开放的、探索性的学习任务的完成.笔者以2019年高考概率压轴题研究为教学案例,从研判学情、设置真实情境、改进解法、问题推广、挖掘背景、变式探究六个方面阐述如何进行深度学习.

关键词:深度学习;高考压轴题;概率

所谓"深度学习"是指在教学中学生积极参与、全身心投入、获得健康发展的、有意义的学习过程.在此过程中,学生在素养导向学习目标的引领下,聚焦引领性学习主题,展开有挑战性的学习任务与活动."深度学习"强调引导学生主动参与学习活动,使学生从单纯的、封闭式的、缺乏挑战性的活动,走向复杂的、开放的、探索性的学习任务的完成;强调对教学内容的结构化,帮助学生全面把握知识的内在联系;强调为学生创设适当的具有真实情境的活动,提供解决真实问题的机会,促进知识的实践转化和综合应用[1].同时,"深度学习"促进教与学方式的根本性转变.随着教学目标转向核心素养,以及教学内容核心性和结构化特点的凸显,教的方式和学的方式应该做出适应性调整,进而达到教学各要素间内在关联性的统一.因此,教师在教学立场上更加尊重学生的学习特点和基本规律,教学内容应从脱离学生的生活经验转向回归社会生活,教学方式应从单向灌输转向师生双边互动、共同探究,真正回归"学习主体"角色,进而让学生学会理解世界、解决问题、学以致用.笔者结合教学实践,由一道高考压轴题的研究展开论述.

题目　为治疗某种疾病,研制了甲、乙两种新药,希望知道哪种新药更有效,为此进行动物实验.方案如下:每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验,对于两只白鼠,随机选一只施以甲药,另一只施以乙药.一轮的治疗结果得出后,再安排下一轮试验.当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时,就停止试验,并认为治愈只数多的药更有效.为了方便描述问题,约定对于每轮试验,若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈,则甲药得1分,乙药得-1分;若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈,则乙药得1分,甲药得-1分;若都治愈或都未治愈则两种药均得0分.甲、乙两种药的治愈率分别记为α和β,一轮试验中甲药的得分记为X.

(1)求X的分布列.

(2)若甲药、乙药试验开始时都赋予4分,$p_i(i=0,1,\cdots,8)$表示"甲药的累计得分为i时,最终认为甲药比乙药更有效"的概率,则$p_0=0$,$p_8=1$,$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$,其中$a=P(X=-1)$,$b=P(X=0)$,$c=P(X=1)$.假设$\alpha=0.5$,$\beta=0.8$.

(ⅰ)证明:$\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,\cdots,7)$为等比数列.

(ⅱ)求p_4,并根据p_4的值解释这种试验方案的合理性.

一、研判学情,提炼主题

这是2019年高考数学全国卷Ⅰ的第21题,是一道概率统计、数列的综合问题,是具有实际情境的数学应用题,选材来源于社会生产生活,综合性较强,对学生各方面的能力和素养提出了较高的要求.试题立意深远,背景深刻,设问巧妙,富含思维价值,是能够检测考生理性思维的广度、深度和创新潜能的良好素材.解答这些问题需要考生具有高层次的理性思维,具有较强的分析问题、探究问题和解决问题的能力.研判学情能够很好地把握学生的认知起点及认知需求,通过创设主题情境,设计驱动性问题,更有效地调动学生参与数学探究的热情.笔者经过教学诊断,精心设置目标关联的问题情境,为学生提供有效的问题解决策略.将探究过程分为理解题意、改进解法、推广拓展等环节,目的是以问题情境促进学生对知识的理解.

二、设置情境,理解题意

知识都是需要学生自己在真实情境中发现的,真实情境就是为打通知识世界或符号世界与生活世界的关联,将它们搭起桥来.把知识条件化、情境化、生活化,让学生更容易理解,更容易迁移、弄懂、弄通,这就需要再现真实情境[2].对于本题,学生不仅要深入阅读理解题意,还要能够正确掌握概率、随机变量、独立性、数列定义等.为使学生准确理解题意,设计如下真实情境任务促使学生产生问题,引发学生的好奇心,促使学生探索研究.

设置真实情境 根据题意进行12轮模拟试验,请学生填写表1(用符号"+""-"分别表示治愈和未治愈,一轮试验共有四个不同结果,即甲+乙+;甲-乙-;甲+乙-;甲-乙+)

《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称"课标")强调以"核心问题"的教学促进学生核心素养的发展,以"问题引领"和"问题驱动"促进学生的数学学习.教师可以鼓励学生在解决问题中开展学习并发现和提出新的问题.基于上述情境可以生成系列问题串.

问题1 如何理解"当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时,就停止试验,并认为治愈只数多的药更有效"这句话?

预设结果:显然从表1易得,每一轮甲、乙两种药物得分之和为0,即$f_{甲}+f_{乙}=0$,所以不论进行几轮试验,甲、乙两药的得分之和均为8,即$i+\xi=8$.并且每多治愈一只白鼠则比对方多得2分.当一方得分为0,则另一方得分为8的时候停止试验,在上面的12轮试验中,甲共治愈了9只白鼠,乙共治愈了5只白鼠,甲比乙多治愈了4只,则停止该试验.

问题2 为什么直接给出"$p_0=0,p_8=1$"?

预设结果:若想得出"甲药比乙药更有效"这个结论,甲的得分要比乙多得8分才行,即甲得8分时,乙得0分,所以$p_8=1$.同理,若想得出"乙药比甲药更有效"这个结论,乙的得分要比甲多得8分才行,即$p_0=0$.把"$p_0=0,p_8=1$"作为条件给出,就不需要学生进行推理了.

问题3 "p_i表示甲药的累计得分为i时,最终认为甲药比乙药更有效的概率"这句中"最终"的含义是什么?试结合p_4的值加以说明.

预设结果:当甲得分为$i(i=1,2,\cdots,7)$分时,即乙得分为$8-i$,当二者分差不是-8或8时,根据规则,试验就不能停止,但是试验最终肯定要有结果(类似于比赛要有"输赢"),必然存在着一种药物比另一种药物有效(获胜)的概率.于是"最终"的含义就是根据甲目前的得分i来预测甲药比乙药更有效的概率p_i.例如,本题p_4表示甲药的累计得分为4分,此时乙药的累计得分也为4分,按照经验,只有当p_4的值很小时,才会得出正确的判断结论.

问题4 如何理解"$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$"?

预设结果:容易发现在试验中,若甲得分为i时,下一轮试验中甲的得分i的变化有如下情况.以a的概率变为$i-1$,以b的概率仍为i,以c的概率变为$i+1$,故由全概率公式得$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$.

表1

试验轮数	试验结果	$f_{甲}$	$f_{乙}$	甲的累积分数i	乙的累积分数ξ
0		4	4	4	4
1	甲-乙+	-1	1	3	5
2	甲+乙-	+1	-1	4	4
3	甲+乙-				
4	甲+乙-				
5	甲+乙+				
6	甲+乙-				
7	甲+乙+				
8	甲-乙+				
9	甲-乙-				
10	甲+乙-				
11	甲+乙+				
12	甲+乙-			8	0
合计		8	0		

三、梳理通法,改进解法

怎样在解题教学中发展学生的数学方法素养?课标强调数学运算素养要明晰运算对象和以运算法则为依据[3].从这一角度来看,数学运算素养首先要明确运算对象以及相应的法则.例如,本题要根据条件明确证明某数列是等比数列以及概率 p_4 的求解,但其解法具有开放性.数学解题教学中主要运用数学运算和逻辑推理解决数学问题,突出体现了数学方法范式.学生通过一题多解不仅能突出训练数学运算与逻辑推理这两种素养,而且可以加深对数学对象和关系的理解,掌握数学方法,形成有秩序的合乎逻辑的认识和表达.因此,这一层面的教学活动应该聚焦学生数学方法素养的发展.笔者先给出官方的解答,然后在课堂中进行"头脑风暴"、自主探索、合作交流,寻求解决问题的不同方案.

小问(1)解:

X 的所有可能取值为 $-1,0,1$.

$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta$,

$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$,所以 X 的分布列为 $P(X=1)=\alpha(1-\beta)$,

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

小问(2)解:

(ⅰ)由小问(1)得 $a=0.4,b=0.5,c=0.1$.因此可得 $p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}$,故有 $0.1\cdot(p_{i+1}-p_i)=0.4(p_i-p_{i-1})$,即 $p_{i+1}-p_i=4(p_i-p_{i-1})$.又因为 $p_1-p_0=p_1\neq0$,所以 $\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为公比为4,首项为 p_1 的等比数列.

(ⅱ)由(ⅰ)可得

$p_8=p_8-p_7+p_7-p_6+\cdots+p_1-p_0+p_0=(p_8-p_7)+(p_7-p_6)+\cdots+(p_1-p_0)=\dfrac{4^8-1}{3}p_1$,由于 $p_8=1$,故 $p_1=\dfrac{3}{4^8-1}$,所以 $p_4=(p_4-p_3)+(p_3-p_2)+(p_2-p_1)+(p_1-p_0)=\dfrac{4^4-1}{3}p_1=\dfrac{1}{257}$.

p_4 表示最终认为甲药更有效的概率,由计算结果可以看出,在甲药治愈率为0.5,乙药治愈率为0.8时,认为甲药更有效的概率为 $p_4=\dfrac{1}{257}\approx0.0039$,此时得出错误结论的概率非常小,说明这种试验方案合理.

对于小问(2),其解法还可以进一步改进,下面展示学生合作探究、交流得到的成果.

改进1:由(ⅰ)得 $\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$ 的首项为 $p_1-p_0=p_1$,公比为4的等比数列,那么可得 $p_8-p_7=p_1\times4^7$,

$p_7-p_6=p_1\times4^6$,

…

$p_2-p_1=p_1\times4$,

$p_1-p_0=p_1$,

取上面的部分等式进行累加,得 $p_8-p_4=p_1(4^7+4^6+4^5+4^4)$,$p_4-p_0=p_1(4^3+4^2+4^1+4^0)$,即 $p_8-p_4=4^4(p_4-p_0)$,又 $p_8=1$,所以 $p_4=\dfrac{1}{4^4+1}=\dfrac{1}{257}$.

改进2:由小问(1)知 $p_{i+1}-p_i=4(p_i-p_{i-1})$,可得 $\dfrac{p_8-p_4}{p_4-p_0}=\dfrac{p_8-p_7+p_7-p_6+p_6-p_5+p_5-p_4}{p_4-p_3+p_3-p_2+p_2-p_1+p_1-p_0}=4^4$,又 $p_8=1,p_0=0$,得 $p_4=\dfrac{1}{4^4+1}=\dfrac{1}{257}$.

改进3:由小问(1)可知 $\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$ 的首项为 $p_1-p_0=p_1$,公比为4的等比数列,那么可得等比数列中,S_4,S_8-S_4 是以 4^4 为公比的等比数列,所以,$S_8-S_4=4^4S_4$,又 $S_p=p_i$,所以,$1-P_4=4^4P_4$,即 $P_4=\dfrac{1}{257}$.

改进4:由小问(1)可知 $p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}$,$0.1(p_{i+1}-p_i)=0.4(p_i-p_{i-1})$,所以,$p_{i+1}-p_i=4(p_i-p_{i-1})=4^2(p_{i-1}-p_{i-2})=\cdots=4^i(p_1-p_0)=4^ip_1$.又因为 $p_1\neq0$,所以 $\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为公比为4,首项为 p_1 的等比数列.

$p_i=(p_i-p_{i-1})+(p_{i-1}-p_{i-2})+\cdots+(p_1-p_0)=p_1(4^{i-1}+4^{i-2}+\cdots+4^1+4^0)=\dfrac{4^i-1}{3}p_1$.因为 $p_8=1$,所以 $p_4=\dfrac{p_4}{1}=\dfrac{p_4}{p_8}=\dfrac{4^4-1}{3}\cdot\dfrac{3}{4^8-1}=\dfrac{1}{4^4+1}=\dfrac{1}{257}$.

点评:前三种改进方法实际上是考虑 $p_0=0,p_8=1$ 的值已知,想办法建立 p_4 与 p_8 的关系,直接求出 p_4.同样,改进4的解法是推出了 p_i 关于 p_1 的表达式,再借助 $p_8=1$ 求解 p_4.以上四种解法都省去了求解 p_1 的步骤,简化了解题,达到出奇制胜之效.可谓一法一个境界,每种解法都彰显理性的力量.

四、问题推广,深度探究

从上述解题过程中可以发现,当不给出 α,β 的具体数值时,仍然可以求出 p_4.

解法1:$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta=a$,因为 $P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)=b$,$P(X=1)=\alpha(1-\beta)=c$,又因为 $p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}=(1-\alpha)\beta p_{i-1}+[\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)]p_i+\alpha(1-\beta)p_{i+1}$,变形得 $\alpha(1-\beta)\cdot(p_{i+1}-p_i)=(1-\alpha)\beta(p_i-p_{i-1})$(※).

设$\{p_{i+1}-p_i\}$的公比为q，则$\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha(1-\beta)}=q$，根据改进4的解法，容易得$p_{i+1}-p_i=q(p_i-p_{i-1})=q^2(p_{i-1}-p_{i-2})=\cdots=q^i(p_1-p_0)=q^ip_1$. 又因为$p_1\neq0$，所以$\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$为公比为$q$，首项为$p_1$的等比数列.

$p_i=(p_i-p_{i-1})+(p_{i-1}-p_{i-2})+\cdots+(p_1-p_0)=p_1(q^{i-1}+q^{i-2}+\cdots+q^1+q^0)=\frac{q^i-1}{q-1}p_1$，根据$p_8=1$，所以$p_4=\frac{p_4}{1}=\frac{p_4}{p_8}=\frac{q^4-1}{q-1}\cdot\frac{q-1}{q^8-1}=\frac{1}{q^4+1}$. 显然，这道题是当$\alpha=0.5$，$\beta=0.8$时，$q=4$.

解法2：还可以得到数列$\{p_i\}$的通项公式. 由解法1得$p_i=\frac{q^i-1}{q-1}p_1$，根据$p_8=1$，故$p_8=\frac{q^8-1}{q-1}p_1$，得$p_1=\frac{q-1}{q^8-1}$，所以$p_i=\frac{q^i-1}{q-1}p_1=\frac{q^i-1}{q-1}\cdot\frac{q-1}{q^8-1}=\frac{q^i-1}{q^8-1}$，因此，$p_4=\frac{q^4-1}{q^8-1}=\frac{1}{q^4+1}$，其中$\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha(1-\beta)}=q$，本题$q=4$，$p_4=\frac{1}{4^4+1}=\frac{1}{257}$.

解法3：应用特征方程法，由解法1的等式(※)，变形得$\frac{(p_{i+1}-p_i)}{(p_i-p_{i-1})}=\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha(1-\beta)}$，令$\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha(1-\beta)}=\lambda$，所以$\frac{(p_{i+1}-p_i)}{(p_i-p_{i-1})}=\lambda$，整理得$p_{i+1}=(1+\lambda)p_i-\lambda p_{i-1}$，其特征方程为$x^2-(1+\lambda)x+\lambda=0$，解得$x_1=1$，$x_2=\lambda$，所以$p_i=A\cdot1^i+B\cdot\lambda^i$，又因为$p_0=0$，$p_8=1$，所以$\begin{cases}p_0=A+B=0\\p_8=A+B\cdot\lambda^8=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}A=-\frac{1}{\lambda^8-1}\\B=\frac{1}{\lambda^8-1}\end{cases}$，

所以$p_i=-\frac{1}{\lambda^8-1}+\frac{\lambda^i}{\lambda^8-1}=\frac{\lambda^i-1}{\lambda^8-1}$，

本题可求得$\lambda=\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha(1-\beta)}=4$，所以$p_4=\frac{1}{4^4+1}=\frac{1}{257}$.

点评：上述解法体现了问题的一般性，尽管它们在步骤上不是最简便的，但是对题目中特殊条件的依赖却是最少的，例如本题不依赖α,β的具体数值仍可以求p_4. 正因为抓住了实质性解法，推广就显得更自然了.

五、挖掘背景，拓展思维

本题的概率论背景属于最简单的直线上的随机游动问题[4]，因为每次试验之后的分数只会在前一次基础上加1或减1，而这道题目又增加了一种分数维持不变的可能性，所以背景应该为如下所述的"两端带有吸收壁的随机游动问题".

考虑在x轴上的一个质点，假定它只能位于整数点，在$t=0$时刻它位于点$x=a$，以后每隔单位时间，它总是受到一个外力的随机作用，使位置发生变化. 分别以概率p及概率$q=1-p$(其中$0<p,q<1$)向正的或负的方向移动一个单位. 同时在$x=0$以及$x=a+b$(其中a,b均为正整数)处各有一个吸收壁，当质点到达吸收壁时，质点被吸收，不再游动. 以$p_i(i=0,1,2,\cdots,a+b)$表示该点在$x=i$处被$x=a+b$处的吸收壁吸收的概率. 求$p_i(i=0,1,2,\cdots,a+b)$.

六、变式探究，内化提升

这道概率统计压轴题所涉及的递推式为"$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$"，化简后即为"$p_{i+1}=pp_i+qp_{i-1}$"，是二阶线性递推数列模型. 为使学生更好地掌握此类问题，给出如下变式.

变式1 "连续抛一枚硬币，直到相邻的两次均为正面为止"的事件发生在第n次抛掷的所有可能方式有多少种？($n\geq2$)

提示：设满足条件的方法数有a_n种，故有$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，其中$a_2=1$，$a_3=1$.

变式2(2011清华自主招生题改编) 抛掷n次硬币，记不连续出现三次正面向上的概率为p_n. (1)求p_1,p_2,p_3,p_4；(2)求p_n的递推公式.

提示：(1)$p_1=p_2=1$，$p_3=\frac{7}{8}$，$p_4=\frac{13}{16}$；(2)$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{4}p_{n-2}+\frac{1}{8}p_{n-3}(n>3)$.

课标明确提出"不断提高学生实践能力"的目标，重视学生数学应用意识的培养，并将"数学建模""数据分析"都列入六大学科核心素养之中. 事实上，课标实施后命制的高考概率统计试题，不仅注重加强数学阅读能力的考查，要求自主分析数据，得出结论，并解决问题，而且强调发挥考生的主体性作用，展现逻辑思维功底，对其探究精神、建模能力等提出了新要求. 因此，加强数学阅读与数学建模创新能力的培养是高考改革中数学教学的当务之急. 另外，在实践活动情境中感悟数学本质，在实践问题解决中提升数学素养是各数学核心素养培养中的共同要求. 对数据分析素养提出"增强基于数据表达现实问题的意识，形成通过数据认识事物的思维品质，积累依托数据探索事物本质、关联和规律的活动经验". 总之，作为学生数学学习中最需要聚焦的思维品质、关键能力，数学核心素养的培养和提升总是与数学问题解决的实践密不可分. 核心素养的属性决定了

(下转第85页)

这节课让你印象最深刻的是什么？请具体描述.

我印象最深的是大家争论圆的面积公式是否为精确公式.

图7 学生对问卷问题1的回答

你喜欢这节课加入数学史的故事吗？为什么？

答：喜欢，这样上课更生动有趣，故事引人入胜，让我们对圆面积公式的理解更直观，而且并非只记住了公式而不理解.

图8 学生对问卷问题2的回答

死气沉沉的刻板内容，也不仅仅是做题.（图8展示了某生的回答）

问题3 现在你认为圆的面积公式是近似的还是精确的呢？为什么？

38位学生认为是精确公式，因为圆分成无数小份后，拼得的图形是精确的长方形或者三角形（图9展示了某生的回答）；只有两位学生仍然觉得不能理解，为什么无数等分后曲线变成“直线”了？课后，笔者对这两位学生进行了访谈，他们认为无数等分后，曲线终究还是曲线，是不可能变成直线的.这也体现了学生对“化曲为直”思想理解上的困惑.本节课的学习，只能是让学生初步感知“微分”思想.

现在你认为圆的面积公式是近似的还是精确的呢？为什么？

答：精确的：因为一个圆可以割成无数个三角形，再将三角形重新组合成为一个长方形。

图9 学生对问卷问题3的回答

五、教学启示

笔者借鉴了“基于数学史的数学学科德育的分类框架”[6]，从理性、情感、信念和品质四个角度对这节课中体现的数学学科德育元素进行分析.

从理性的角度看，学生通过圆面积公式的推导过程，对分割的曲线产生的疑问进行思考，类比现实问题，最后绝大部分学生能够认识到，圆的面积公式是一个准确的计算公式，体现出数学的理性精神.

从情感的角度分析，本节课设计了小组讨论环节，让学生合作解决现实中的问题.在此过程中，学生不仅掌握了知识，还体验到用数学解决实际问题的乐趣，从而在心里种下自信的种子，提高学习数学的兴趣.

从信念的角度看，在教学过程中，教师通过生活实例让学生感受“化曲为直”的思想，历史上数学家开普勒在人生困境中还能重新振作、勤于思考，给学生带来很大的鼓励，增强了学习数学的信心.微视频的呈现，也拓宽了学生数学学习的视野.

从品质的角度分析，课堂互动培养了学生运用数学语言进行交流的能力，以及学会倾听他人的好习惯，这对学生的成长成才具有重要意义.课堂中对圆面积公式是近似还是精确的讨论，促进了学生的思考，这些都在潜移默化中提升了学生的品质.

本节课把数学史引入数学教学中，让课堂更加生动有趣，增强了学生学习数学的信心.将开普勒求圆面积公式的方法，与教材上利用出入相补原理将圆拼接为长方形的方法共同呈现出来，也希望呈现出数学课堂的德育价值、人文素养，让数学课堂不孤立于“人”而存在.本节课还引导学生借助现有知识，对“化曲为直”的思想有初步的感知和理解，提升学生的数学高阶思维.最后，绝大部分学生走出了“圆面积公式是一个近似公式”的误区，达到了预期的课堂效果；与此同时，学生进一步感受到，数学来源于生活但又高于生活，可以借助数学解决生活中的若干问题.

参考文献

[1] 高燕，胡媛.圆的面积：从历史到课堂[J].上海中学数学，2014(5)：1-3.

[2] 汪晓勤.数学文化透视[M].上海：上海科学技术出版社，2013：60-62.

[3] D. J. Struik. A concise history of mathematics, volume II [M]. New York: Dover publications, INC, 1948: 128-129.

[4] 汪晓勤.HPM：数学史与数学教育[M].北京：科学出版社，2017：174.

[5] 汪晓勤.HPM：数学史与数学教育[M].北京：科学出版社，2017：14.

[6] 汪晓勤，邹佳晨.基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J].数学通报，2020(3)：7-12.

（上接第49页）

它的习得必然依赖于深度学习过程，而核心素养一旦形成又会有力支持深度学习，两者是相互加强的良性互动循环关系.

参考文献

[1] 刘月霞.指向“深度学习”的教学改进：让学习真实发生[J].中小学管理，2021(5)：13-17.

[2] 杨玉琴，倪娟.深度学习：指向核心素养的教学变革[J].当代教育科学，2017(8)：43-47.

[3] 史宁中，王尚志.普通高中数学课程标准（2017年版）解读[M].北京：高等教育出版社，2018：68.

[4] 李贤平.概率论基础：第三版[M].北京：高等教育出版社，2010：89-92.