函数性质中的数学抽象在问题解决与设计中的应用

201299　上海市新川中学　姚志青

摘　要:笔者从2021年上海高考数学卷函数压轴题的解题方法中分析得到数学抽象的三个方面,即类比抽象,强、弱抽象以及表征抽象.笔者举例说明函数性质中如何体现数学抽象的三个方面,并结合学生的认知情况,通过数学抽象进行针对性的问题设计,帮助学生提升数学抽象核心素养,体现数学抽象在学生理解内化知识过程中的价值和意义.

关键词:函数性质;数学抽象;问题解决;问题设计;数学核心素养

2017年版《普通高中数学课程标准》给出了普通高中数学学科的核心素养要求,包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析六个方面.数学发展所依赖的思想在本质上有三个,即抽象、推理、模型,其中抽象是核心.数学抽象作为一种数学思想渗透在数学学科的各个知识点之中,笔者对如何在函数性质中体现数学抽象以及如何应用数学抽象进行问题设计展开实践与研究.

一、数学抽象在函数性质中的体现

函数是贯穿高中数学的一条主线,数学抽象在函数问题中的应用非常广泛,以2021年上海高考的数学压轴题为例.

原题　如果对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,当 $x_1 - x_2 \in S$ 时,恒有 $f(x_1) - f(x_2) \in S$ 成立,则称 $f(x)$ 是 S 关联.

(1)判断并证明 $f(x) = 2x - 1$ 是否是$[0, +\infty)$关联?是否是$[0,1]$关联?

(2)已知 $f(x)$ 是$\{3\}$关联,且 $x \in [0,3)$ 时,$f(x) = x^2 - 2x$,解不等式 $2 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

(3)求证:"$f(x)$ 是$\{1\}$关联,且是$[0, +\infty)$关联"的充要条件是"$f(x)$ 是$[1,2]$关联".

这个问题是一个函数的定义型问题,它定义了"$f(x)$ 是集合 S 关联的概念",通过函数性质的应用考查学生的数学核心素养.函数性质的应用体现了其源于教材中的形式,需要将函数的性质在文字语言、符号语言、图像表述三个方面进行内化,以理解函数性质的本质特征.这个内化的过程可以体现在数学抽象方面,所谓数学抽象就是能够根据一类数学对象抽取或归纳出其本质特征的思维过程.笔者结合上述具体的步骤,分析问题中涉及数学抽象的三个方面.

小问(1)解:由 $f(x) = 2x - 1$,得 $f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1 - x_2)$.

当 $x_1 - x_2 \in [0, +\infty)$ 时,$f(x_1) - f(x_2) \in [0, +\infty)$,所以 $f(x)$ 是$[0, +\infty)$关联;当 $x_1 - x_2 \in [0,1]$ 时,$f(x_1) - f(x_2) \in [0,2]$,所以 $f(x)$ 不是$[0,1]$关联.

(一)数学抽象需要类比抽象

由题中 $f(x_1) - f(x_2)$ 的形式容易类比联想到教材中的形式,在函数单调性中,通过 $f(x_1) - f(x_2)$ 来作差比较 $f(x_1)$,$f(x_2)$ 大小,从而确定 $f(x)$ 的单调性.解题过程中"由 $f(x) = 2x - 1$ 得到 $f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1 - x_2)$,则当 $x_1 - x_2 \in [0, +\infty)$ 时,$f(x_1) - f(x_2) \in [0, +\infty)$"的本质就是"当 $x_1 \geqslant x_2$ 时,都有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$",类比联想到函数的单调递增的性质(非严格单调),所以可以通过类比的方法抽象得到 $f(x_1)$,$f(x_2)$ 的性质.类比抽象就是通过类比的方法抽象出数学对象的形式或性质,它包括两个方面,一个是类比,一个是抽象.类比本身是非常重要的数学思想方法,数学中的类比是基于对两类数学对象的共性比较得出它们可能具有的其他形式或者性质的方法.

小问(2)解:$f(x)$ 是$\{3\}$关联,所以当 $x_1 - x_2 = 3$ 时,恒有 $f(x_1) - f(x_2) = 3$ 成立.

由 $f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2$,得 $f(x_1) - x_1 = f(x_2) - x_2$,令 $F(x) = f(x) - x$,有 $F(x_1) = F(x_2)$,得到 $F(x_2 + 3) = F(x_2)$,即对任意 $x \in \mathbf{R}$,都有 $F(x + 3) = F(x)$.

故 $F(x)$ 是一个周期为3的函数,且 $x \in [0,3)$ 时,$F(x) = x^2 - 3x$.

由 $2 \leqslant f(x) \leqslant 3$,得 $2 \leqslant F(x) + x \leqslant 3$,$2 - x \leqslant F(x) \leqslant 3 - x$.作出 $F(x) = x^2 - 3x$,$g(x) = 2 - x$,$h(x) = 3 - x$ 的图像,如图1,满足不等式 $g(x) \leqslant F(x) \leqslant h(x)$ 的图像表示为 $F(x)$ 在 $g(x)$,$h(x)$ 之间的图像,所以为点 A 和点 B 之间的曲线段,由 $\begin{cases} y = x^2 - 3x, x \in [0,3) \\ g(x) = 2 - x \end{cases}$,得 $x_A = 1 + \sqrt{3}$,由图像平

移得 $x\in[3,6)$ 时，$F(x)=(x-3)(x-6)$，由 $\begin{cases}y=(x-3)(x-6),x\in[0,3)\\h(x)=3-x\end{cases}$，得 $x_B=5$.

综上，不等式 $2\leqslant f(x)\leqslant 3$ 的解集为 $x\in[1+\sqrt{3},5]$.

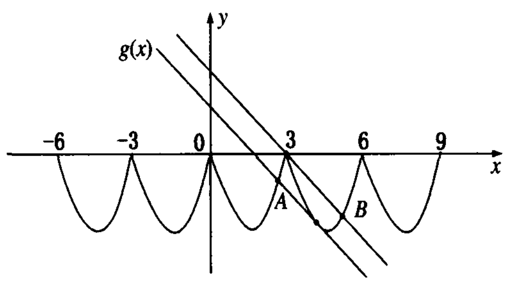

图1

(二)数学抽象需要表征抽象

表征抽象就是以数学对象的呈现特征抽象构建出其形象化的特征结构. 譬如由 $f(x_1)-x_1=f(x_2)-x_2$ 的呈现特征，令 $F(x)=f(x)-x$，为使 $f(x)-x$ 的性质表征更加明显，需要抽象构建出函数. 解不等式 $2-x\leqslant F(x)\leqslant 3-x$ 的过程中，代数方法解决不等式问题比较复杂，利用数形结合的思想，可以用几何图像解决不等式问题，作出 $F(x)=x^2-3x$，$g(x)=2-x$，$h(x)=3-x$ 的图像满足 $F(x)$ 在 $g(x)$，$h(x)$ 之间的部分. 对于表征抽象而言，关键在于结构特征的研究和归纳表述. 对于同一个问题，表征抽象的观察点不同，抽象得到的性质特征也会不同，譬如上述"当 $x_1-x_2=3$ 时，恒有 $f(x_1)-f(x_2)=3$ 成立"还可以抽象到"对任意的实数 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x+3)=f(x)+3$ 成立".

小问(3)解：

必要性：已知 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联，且是 $[0,+\infty)$ 关联，

由 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联知 $f(x+1)-f(x)=1$，即 $f(x+1)=f(x)+1$，

由 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 关联，可知对任意 $x_1-x_2\geqslant 0$，都有 $f(x_1)-f(x_2)\geqslant 0$，即 $x_1\geqslant x_2$ 时，都有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，所以，当 $x_1-x_2\geqslant 1$ 时，$x_1\geqslant x_2+1$，$f(x_1)\geqslant f(x_2+1)$，则有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)+1$，$f(x_1)-f(x_2)\geqslant 1$.

当 $x_1-x_2\leqslant 2$ 时，$x_1\leqslant x_2+2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2+2)$，则 $f(x_1)\leqslant f(x_2+1)+1=f(x_2)+2$，$f(x_1)-f(x_2)\leqslant 2$.

因此，当 $x_1-x_2\in[1,2]$ 时，都有 $f(x_1)-f(x_2)\in[1,2]$，即 $f(x)$ 是 $[1,2]$ 关联.

充分性：已知 $f(x)$ 是 $[1,2]$ 关联，故对任意的 $x_1-x_2\in[1,2]$ 都有 $f(x_1)-f(x_2)\in[1,2]$，则有

$$\begin{cases}f(x+1)-f(x)\geqslant 1 & (1)\\f(x+2)-f(x+1)\geqslant 1 & (2)\\f(x+2)-f(x)\leqslant 2 & (3)\end{cases},$$

故 $\begin{cases}f(x+1)-f(x)=1\\f(x+2)-f(x)=2\end{cases}$，由 $f(x+1)-f(x)=1$，得 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联，即 $f(x+1)=f(x)+1$，故对任意的 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f(x+n)=f(x+n-1)+1=f(x+n-2)+2=\cdots=f(x)+n$，$f(x+n)-f(x)=n$，所以 $f(x)$ 是 $\{n\}$ 关联 $(n\in\mathbf{N})$，对任意的 $x_1-x_2\in[0,+\infty)$，必存在 $k\in\mathbf{N}$ 使得 $x_1-x_2\in[k,k+1]$，所以，任意 $x_1-x_2-k+1\in[1,2]$ 时，即 $x_1+1-(x_2+k)\in[1,2]$ 时，恒有 $f(x_1+1)-f(x_2+k)\in[1,2]$ 成立，$f(x_1+1)-f(x_2+k)=f(x_1)+1-f(x_2)-k\in[1,2]$，则 $f(x_1)-f(x_2)\in[k,k+1]$，则 $f(x_1)-f(x_2)\in[0,+\infty)$，所以，$f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 关联.

(三)数学抽象需要强、弱抽象

上述解题过程中将"$f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联推出对任意的 $x_1-x_2=1$，都有 $f(x_1)-f(x_2)=1$"理解为当自变量相差1的时候都有相应的函数值也相差1，这样的表述虽然弱化了对于定义描述的严谨性，但便于记忆表述. 在应用过程中，又可以进一步加强为"对于任意的实数 x，都有 $f(x+1)-f(x)=1$"，这样的描述是严谨的，而且便于理解表述. 在概念教学中，数学抽象需要体现出不拘于形式的内化理解，这个内化理解根据实际情况的需要可以对研究对象进行弱化或强化的表述，也就是强抽象和弱抽象. 沪教版新教材中关于增函数的定义为："对于定义在 D 上的函数 $y=f(x)$，设区间 I 是 D 的一个子集，对于区间 I 上的任意给定的两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，如果总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，就称 $f(x)$ 在区间 I 上是增函数，特别地，如果总有 $f(x_1)<f(x_2)$，就称 $f(x)$ 在区间 I 上是严格增函数."用弱抽象可以将上述定义表述为"函数值随着自变量增大而增大的函数称为严格增函数"，用弱抽象可以将上述图形特征抽象为"图像从左下方升至右上方的函数图像称为严格增函数图像". 弱抽象即从原型中选取某一特征加以抽象，使原型内涵减少，结构变弱，从数学对象的众多属性或特征中辨认出其特征属性. 用强抽象可以将上述定义抽象为"对任意的 $x\in I$，使任意的 $\varepsilon>0$ 都有 $f(x+\varepsilon)>f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上为严格增函数". 用强抽象可以将上述图形特征抽象为"函数 $f(x)$ 图像上的任意两个不同的点，都有右边的点高于左边的点，则函数 $f(x)$ 图像为严格增函数图像". 强抽象即通过在原型中引入新特征，使原型内涵增加，结构变强，从数学对象的关键属性或特征中强化其特征属性.

二、应用数学抽象进行问题设计

从显性来看，数学抽象是学生在观察、思考、表达三个方面的能力，通过数学抽象进行问题设计是

帮助学生实现问题解决和提升数学抽象能力的有效途径.在高三函数性质的复习课中,根据数学学科核心素养的培养要求,笔者对如何通过数学抽象进行问题设计展开教学实践的研究和分析(如图2所示).

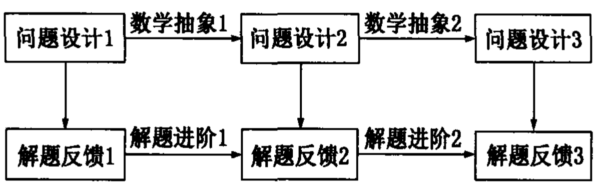

图2

问题设计1 对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1-x_2\in S$ 时,恒有 $f(x_1)-f(x_2)\in S$ 成立,则称 $f(x)$ 是 S 关联.求证:如果 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联,那么 $f(x)$ 是 $\{2\}$ 关联.

解题反馈1 学生解题情况统计结果显示,参加解题的十位学生都不能给出完整的证明过程,但是证明过程中的第一步基本都能表述出来,即写到如下证明步骤后证明思路就戛然而止.

解:由 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联,则对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1-x_2=1$ 时,都有 $f(x_1)-f(x_2)=1$.

解题难点分析:由"对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1-x_2=1$ 时,都有 $f(x_1)-f(x_2)=1$"推理得到"对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1-x_2=2$ 时,都有 $f(x_1)-f(x_2)=2$"的逻辑关系缺乏直观想象,而且推出关系的表述存在较大困难.在教材中,经常用一个变量 x 的特征形式来表示函数 $f(x)$ 的性质,学生对于理解 $x_1-x_2=1$ 中两个变量 x_1,x_2 之间的关系存在一定的困难.

难点突破策略:通过数学抽象,在保持函数性质不变的前提下,可以将问题抽象转化为熟悉的形式.譬如,将"对任意的 $x_1-x_2=1$,都有 $f(x_1)-f(x_2)=1$"进行适当的强、弱抽象.通过弱抽象表述为"当自变量增大1个单位时,函数值增大1个单位",通过强抽象表述为"对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+1)-f(x)=1$".通过数学抽象之后,将问题进行再设计.

问题设计2 对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1-x_2\in S$ 时,恒有 $f(x_1)-f(x_2)\in S$ 成立,则称 $f(x)$ 是 S 关联.

(1)求证:如果 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联,那么对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+1)-f(x)=1$.

(2)求证:如果 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联,那么 $f(x)$ 是 $\{2\}$ 关联.

解题反馈2 学生解题情况统计结果显示,参加解题的十位学生都能完成小问(1)的证明,完成小问(2)证明的学生只有五位.对比问题设计1中的解题情况反馈,通过数学抽象得到"任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+1)-f(x)=1$"的形式后,学生可以明显体会到数学抽象的思想和方法,由表征抽象将"$f(x_1)$,$f(x_2)$ 的关系"抽象到"$f(x+1)$,$f(x)$ 的关系".对于小问(2),有五位学生能够独立应用表征抽象将"$f(x_1)$,$f(x_2)$ 的关系"抽象到"$f(x+2)$,$f(x)$ 的关系"后得到 $f(x)$ 是 $\{2\}$ 的关联,这五位学生在这个问题中表现出已经逐步达到了应用数学抽象解决问题的素养要求.完成全部证明过程学生的解题过程归纳如下.

小问(1)解:由 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联,则对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1-x_2=1$ 时,都有 $f(x_1)-f(x_2)=1$.由 $x_1-x_2=1$,得 $x_1=x_2+1$,代入 $f(x_1)-f(x_2)=1$ 得 $f(x_2+1)-f(x_2)=1$,故 $f(x_2+1)=f(x_2)+1$,即 $f(x+1)-f(x)=1$.

小问(2)解:由小问(1)得对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+1)-f(x)=1$,同理 $f(x+2)-f(x+1)=1$,上述两式相加得 $f(x+2)-f(x)=2$,即 $f(x)$ 是 $\{2\}$ 关联.

解题难点分析:小问(2)中,"$f(x)$ 是 $\{2\}$ 关联"的充要条件为"对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1-x_2=2$ 时,都有 $f(x_1)-f(x_2)=2$",需要继续通过数学抽象表述为"对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+2)-f(x)=2$",数学抽象是逻辑推理和表述过程的前提.

难点突破策略:通过数学抽象的表征抽象将"$f(x)$ 是 $\{2\}$ 关联"抽象为"$f(x+2)-f(x)=2$".

问题设计3 对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1-x_2\in S$ 时,恒有 $f(x_1)-f(x_2)\in S$ 成立,则称 $f(x)$ 是 S 关联.

(1)求证:如果 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联,那么对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+1)-f(x)=1$.

(2)如果任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+1)-f(x)=1$,求证:$f(x+2)-f(x)=2$.

(3)求证:如果 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联,那么 $f(x)$ 是 $\mathbf{N}^*$ 关联.

解题反馈3 问题设计3中的小问(2)是主要针对在问题设计2中没能完成解答的五位学生进行的教学对比实验,其主要变化是将原先的条件"$f(x)$ 是 $\{2\}$ 关联"替换为"$f(x+2)-f(x)=2$".统计结果显示这五位学生对小问(2)都给出了正确的证明,还有学生对小问(3)进行了尝试证明.对小问(3)的解题过程归纳如下.

小问(3)解:由 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联,可知对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+1)-f(x)=1$,$f(x+1)=f(x)+1$,所以对 $n\in\mathbf{N}^*$,有 $f(x+n)=f(x+n-1)+1=f(x+n-2)+2=\cdots=f(x)+n$,即 $f(x+n)-f(x)=n$,所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{N}^*$ 关联.

(下转第29页)

$=(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)},0)$，所以$(1-\frac{1}{n+1},0)=(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)},0)$，即$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

三、构造向量求“等差×等比”数列前n项和

问题3 设数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，数列$\{b_n\}$是公比为q的等比数列，求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和.

解析：同上，这里只需解析当$q\neq1$时的求和.

记$\overrightarrow{OA_i}=(a_i,0)$，$\overrightarrow{OB_i}=(b_i,0)$，且$\overrightarrow{OA_{i+1}}=\overrightarrow{OA_i}+(d,0)$，$\overrightarrow{OB_{i+1}}=q\overrightarrow{OB_i}$，则$\overrightarrow{OA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{OB_{i+1}}=q\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i}+q(d,0)\cdot\overrightarrow{OB_i}$，则有$\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{OB_{i+1}}=q\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i}+qd\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i}+\overrightarrow{OA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{OB_{i+1}}-\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}=q\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i}+qd\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，故$(q-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i}=\overrightarrow{OA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{OB_{i+1}}-\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}-qd\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，所以$(q-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=a_{n+1}b_{n+1}-a_1b_1-qd\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，即$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=\frac{a_{n+1}b_{n+1}-a_1b_1-qd\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}{q-1}$.

评注：问题3的解决常用经典的“错位相减法”求和，这里是在构造向量的基础上综合运用有关向量的线性表示，结合向量数量积运算求得“等差×等比”数列的前n项和公式.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准：2017年版2020年修订[S].北京：人民教育出版社，2020：25.

[2] 陈德山.向量在中学代数中的应用[J].数学通报，1987(9)：20-21.

[3] 李锦昱，王海波.构造向量，巧证不等式[J].数学通讯，2002(20)：11.

[4] 张定强.巧用向量的数性积解题举例[J].数学通报，2003(2)：25-26.

[5] 李铁烽.构造向量证三元分式不等式[J].数学通报，2004(2)：30-32.

[6] 廖冬云.构造平面向量，解决三角问题[J].数学通讯，2004(10)：11.

[7] 聂文喜.构造向量证明课本不等式[J].数学通讯，2004(18)：15.

[8] 王志进，程美.竞赛不等式的创新证法——向量内积法[J].数学通报，2005(4)：53-54.

[9] 张国治.构造平面向量，妙解一个数学问题[J].数学通报，2007(11)：51.

(上接第24页)

解题难点分析：小问(3)的问题设计是由“$f(x)$是$\{1\}$关联”的特征类比抽象到“$f(x)$是$\{2\}$关联”，进而由特殊到一般的思想，继续通过类比抽象得到问题“$f(x)$是$\mathbf{N}^*$关联”.由问题中的数字运算拓展到字母运算，其难点在于逻辑关系的导出与描述.

难点突破策略：通过由“$f(x)$是$\{1\}$关联”推理出“$f(x)$是$\{2\}$关联”的逻辑关系，不难得出“$f(x)$是$\{3\}$关联，$\{4\}$关联……”类比这样的递推关系，可以联系到数列中的递推关系，因此可以通过类比抽象的思想，应用数列中递推关系的表述方法来证明$f(x)$是$\mathbf{N}^*$关联.

在函数的性质中，函数的奇偶性、单调性、周期性等性质都可以尝试通过数学抽象达到理解内化的过程.以函数的奇偶性为例，关于偶函数定义中“对于任意的$x\in D$，都有$f(-x)=f(x)$”的理解，通过弱抽象可以表述为“定义域内的任意两个互为相反数的自变量，它们对应的函数值相等”，通过强抽象可以表述为“对于任意的$x_1,x_2\in D$，当$x_1+x_2=0$时，都有$f(x_1)=f(x_2)$”，这种抽象到x_1,x_2来定义的形式，可以与函数单调性的定义形式统一起来.用相同的x_1,x_2来定义不同的函数性质可以帮助学生体会这些性质的共性以及本质特征，启发学生的抽象思维.函数的性质本质上是由自变量和因变量的变化特征所体现出来，所以在表征抽象之后可以通过弱抽象帮助学生理解函数的本质，通过强抽象帮助学生用不同方式严谨而准确地表述函数性质.学生对于学习内容掌握的关键在于能够将所要研究的数学对象抽象到能够理解内化的文字语言、符号语言和图像语言.关于数学抽象、逻辑推理和数学建模，史宁中教授给出这样的理解：通过抽象，在现实生活中得到数学的概念和运算法则，通过推理得到数学的发展，然后通过模型建立数学与外部世界的联系.可以看出，无论是由现实生活到数学概念的抽象，还是在数学问题解决过程中的数学抽象思维，都体现了数学抽象作为数学素养的核心价值.

参考文献

[1] 吴晓红，谢海燕.基于学科核心素养的数学教学课例研究[M].上海：华东师范大学出版社，2019.

[2] 史宁中.数学思想概论：第一辑[M].长春：东北师范大学出版社，2008.

[3] 《数学辞海》编辑委员会.数学辞海：第六卷[M].太原：山西教育出版社，2002.