浅论函数奇偶性的判断方法

335500 江西省万年县万年中学 徐 广
335500 江西省万年县万年一中 李 敏

摘 要:笔者主要介绍基于奇偶性定义的函数奇偶性综合判断方法,即加减乘除的运算合成判断法和内外复合判断法.

关键词:函数;奇偶性;判断方法

函数的奇偶性是函数的重要性质,也是高考的重点与热点,更是广大高中生的易错点.学好函数的奇偶性一直是广大高中生的诉求,要掌握好函数奇偶性的判断方法,可以从以下三个方面入手.

一、关于函数奇偶性的定义

北师大版高中数学教材中关于函数奇偶性的定义简述如下.

设函数 $y=f(x)$, $x\in I$,且对任意 $x\in I$,恒有 $-x\in I$(即定义域要关于原点对称),(1)若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为奇函数;(2)若 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为偶函数.

上述定义从理论上说明,定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的一个前提.相当一部分学生常常忽视所给函数的定义域,直接用函数奇偶性的判别式确定其奇偶性,很容易得出错误的结论.

例1 判断函数 $F(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$ 的奇偶性.

错解:由题意可得 $F(x)=x^2$,从而有 $F(-x)=F(x)$,所以 $y=F(x)$ 为偶函数.

评析:上述解答没有求出函数的定义域,忽视了判断函数的定义域是否关于原点对称.

正解:因为 $y=F(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,不关于原点对称,所以 $y=F(x)$ 不具有奇偶性.

因此,教师在讲授新课时,一定要强调定义域关于原点对称的重要性与先决性.

类似的,函数 $g(x)=\dfrac{\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}$, $x\in\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$ 不具有奇偶性.

例2 若函数 $f(x)=\dfrac{k-2^x}{1+k2^x}$ 在定义域上为奇函数,求实数 k 的值.

错解:因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(0)=0$,即 $f(0)=\dfrac{k-2^0}{1+k2^0}=\dfrac{k-1}{1+k}=0$,从而有 $k=1$.

评析:上述解法没有考虑0是否属于 $f(x)$ 的定义域,而是默认 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义.

正解:由 $f(-x)=-f(x)$,得 $\dfrac{k-2^{-x}}{1+k2^{-x}}=-\dfrac{k-2^x}{1+k2^x}$,整理可得 $k^2(2^x+2^{-x})=2^x+2^{-x}$,从而有 $k=1$ 或 $k=-1$.经验证,均合题意.

例3 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{(x-a)(x+2)}$ 为奇函数,求实数 a 的值.

解析:注意到函数的定义域要关于原点对称,已知 $x\neq-2$ 且 $x\neq a$,所以要保证定义域对称,则 $a=2$,这是 $f(x)$ 为奇函数的必要条件,经验证,符合题意.

二、函数奇偶性的四则运算合成

在默认的最大定义域内,$y=x^{2k-1}(k\in\mathbf{Z})$, $y=x^{\frac{p}{q}}$(p,q 为互质的奇数),$y=x^{-\frac{p}{q}}$(p,q 为互质的奇数),$y=\sin x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ 为奇函数;$y=c(c\neq0)$, $y=x^{2k}(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$, $y=x^{\frac{p}{q}}$(p,q 为互质的正整数,p 为偶数),$y=x^{-\frac{p}{q}}$(p,q 为互质的正整数,p 为偶数),$y=\cos x$ 为偶函数;$y=0$ 既是奇函数又是偶函数.

在掌握了初等函数的奇偶性后,对于给定的复杂函数的奇偶性,往往不需要直接用定义方法来证明或判断,而是用合成方法处理.

设在公共定义域内,函数 $f(x)$ 和 $f_0(x)$ 为奇函数,而 $g(x)$ 与 $g_0(x)$ 为偶函数,k,c 为常数,则有如下结论.

(1)当 $k\neq0$ 时,$y=kf(x)$ 为奇函数,$y=kg(x)$ 为偶函数.特别地,当 $k=0$ 时,$y=kf(x)$ 和 $y=kg(x)$ 既是奇函数也是偶函数.

(2)当 $c\neq0$ 时,$y=f(x)+c$ 不是奇函数,$y=g(x)+c$ 为偶函数.

(3)$y=f(x)\pm f_0(x)$ 为奇函数,$y=g(x)\pm$

$g_0(x)$为偶函数.

(4)$y=\frac{1}{f(x)}$为奇函数,$y=\frac{1}{g(x)}$为偶函数.定义域可能会有所变化,例如 $y=\frac{1}{x}(x\neq 0)$和 $y=\frac{1}{\cos x}\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$.

(5)$y=f(x)f_0(x)$为偶函数,$y=g(x)g_0(x)$为偶函数.

(6)$y=f(x)g(x)$为奇函数.

(7)设 $h(x)=kf(x)+cg(x)$(其中 $f(x)$不为偶函数,$g(x)$不为奇函数),若 $h(x)$为奇函数,则 $c=0$;若 $h(x)$为偶函数,则 $k=0$.

例4 判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=2x^3-\frac{1}{x}$;(2)$g(x)=x^2\sin x$;

(3)$h(x)=\frac{(e^x-e^{-x})}{e^x+e^{-x}}\tan x$.

解:(1)$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上为奇函数;(2)$g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的为奇函数;(3)$h(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$上为偶函数.

例5 设 $F(x)=x^3+(t-1)x^2$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,求实数 t 的值.

解:由题意可得 $t-1=0$,即 $t=1$.

这里可以直接省去用 $F(-1)=-F(1)$计算得出结果,或者由计算稍微复杂的 $F(-x)+F(x)=0$ 推导得到结果.

例6 若函数 $f(x)=\frac{x-a+1}{x^4+bx+1}$在$(-2,2)$上为奇函数,求实数 a 与 b 的值.

分析:因为 $f(x)$在 $x=0$ 处有定义,所以$f(0)=0$,可得 $a=1$,所以分子为 x,是奇函数,而$f(x)$为奇函数,所以分母 x^4+bx+1 必须为偶函数,即有 $b=0$.

解:因为 $f(x)$的定义域为$(-2,2)$,所以有 $f(0)=0$,即 $a=1$,从而可得 $f(x)=\frac{x}{x^4+bx+1}$为偶函数,进而有 $b=0$.

这里主要应用了函数 $y=0$ 既是奇函数也是偶函数的性质,在判断加减复合的过程中,将“杂项”变换为常数 0,消除它的影响.

三、复合函数的奇偶性

对于复合函数的奇偶性,也可以用复合法则进行判断.

设函数 $y=f(t)$与 $t=g(x)$分别为复合函数 $y=f[g(x)]$的外层函数(简称外函数)和内层函数(简称内函数),则 $y=f[g(x)]$的奇偶性如表1所示.

表1

$y=f(t)$	$t=g(x)$	$y=f[g(x)]$
奇函数	奇函数	奇函数
奇函数	偶函数	偶函数
偶函数	奇函数	偶函数
偶函数	偶函数	偶函数

由奇函数和偶函数的性质,可知奇函数中自变量带有负号可以向外提出,而偶函数自变量中的负号不能向外提出,即可内消.

因此,可以归纳出判断复合函数奇偶性的方法.首先,判断定义域是否关于原点对称;其次,不论是几层复合函数,一旦有一层为偶函数,则复合函数为偶函数,否则为奇函数.

例7 判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=\sin(x^3-x)$;(2)$g(x)=\cos(x^3+x)$;(3)$h(x)=|\tan x|$.

解:(1)$f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数;(2)$g(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数;(3)$h(x)$为$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$上的偶函数.

这种方法方便学生在审题时确定函数的奇偶性,但在处理具体问题时,一定要确认其定义域关于原点的对称性.

四、函数的局部奇偶性

对于奇(偶)函数平移后得到的新函数,在此将其称为具有局部奇偶性函数,常用分离方法处理这类问题.

例8 设函数 $f(x)=a\sin x-bx^3+1$,且$f(3)=5$,求 $f(-3)$的值.

分析:对于函数 $f(x)=a\sin x-bx^3+1$,其中 $a\sin x-bx^3$ 为奇函数,$y=f(x)$的图像可由$g(x)=a\sin x-bx^3$ 的图像向上平移 1 个单位得到.要求 $f(-3)$,关键要求出 $g(-3)$的值,而 $g(-3)=-g(3)$.显然,$g(3)=f(3)-1$.

解:设 $g(x)=a\sin x-bx^3$,则 $f(x)=g(x)+1$,所以 $f(3)=g(3)+1=5$.

从而,$g(3)=4$,$g(-3)=-g(3)=-4$,则 $f(-3)=g(-3)+1=-3$.

综上可知,要熟练掌握函数的奇偶性,不但要深刻理解奇偶性的定义,而且要能领会奇偶函数的本质特征.