



## 参考文献

- [1] 教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020:90.
- [2] 覃淋.美国现代数学教育改革及其启示[J].中学数学研究,2018(6):1-4.
- [3] 李勇,章建跃.全国重点高中数学教师概率统计知识储备现状调查[J].数学通报,2016,55(9):1-9.
- [4] 课程教材研究所.普通高中教科书A版数学:必修第二册[M].北京:人民教育出版社,2020:172-260.
- [5] 课程教材研究所.普通高中教科书A版数学:选择性必修第三册[M].北京:人民教育出版社,2020:43-136.
- [6] [日]大岛利雄.改订版 数学I[M].东京:数研出版株式会社,2021:134-155.
- [7] [日]大岛利雄.改订版 数学A[M].东京:数研出版株式会社,2021:30-50.
- [8] [日]大岛利雄.改订版 数学B[M].东京:数研出版株式会社,2021:100-129.
- [9] 陈希孺.概率论与数理统计[M].合肥:中国科学技术

大学出版社,2009:5-9.

- [10] C.R.劳.统计与真理:怎样运用偶然性[M].北京:科学出版社,2004:104-118.
- [11] 袁智强.数学师范生整合技术的学科教学知识发展研究[M].北京:科学出版社,2016:41.
- [12] A.D.亚历山大洛夫.数学——它的内容、方法和意义(第一卷)[M].北京:科学出版社,2019:1.
- [13] 覃淋.大陆和台湾高中数学教材“统计与概率”内容比较研究[J].中学数学杂志,2017(09):20-23.

**作者简介** 覃淋(1991—),男,四川南充人,硕士,助教;主要研究数学史与数学教育;发表论文10余篇,其中人大复印报刊资料《高中数学教与学》全文转载3篇.

喻晓婷(1993—),女,四川巴中人,助教;主要研究中小学数学教育教学.

张静(1992—),男,四川广安人,小教二级教师;主要研究小学数学教育教学.

# 三个版本高中数学新教材微型探究活动比较

——以“预备知识”部分为例

阜阳师范大学数学与统计学院 236037 褚小婧

**【摘要】** 为了帮助学生顺利完成初高中数学学习的过渡,各个版本高中数学新教材均设置了“预备知识”部分.利用数学探究活动分析框架,分析了三个版本高中数学新教材“预备知识”部分的微型探究活动,发现微型探究活动的数量和种类较多、陈述性知识探究所占比重较大、开放水平偏低、缺乏实验型探究方式.建议增加模仿性数学应用探究活动、提升开放水平;北师大版还应提升微型探究活动的数量和种类、苏教版应增加以“思想型”为完成方式的探究活动,以更好落实数学核心素养.

**【关键词】** 高中数学新教材;微型探究活动;预备知识

2020年秋季,全国有20多个省份开始实施新课程,使用新教材.为了帮助学生顺利完成初高中学习的过渡,各个版本高中数学教材在《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》的指导下设置了“预备知识”部分,包括集合、常用逻辑用语、相等关系与不等关系、从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式等内容.“预备知识”部分关注的数学核心素养主要有数学抽象、逻辑推理和数学运算素养三种.课程标准指出,数学探究活动是综合提升数学学科核心素养的载体<sup>[1]</sup>.不过新教材中完整的数学探究栏目数量较少,如人教A版一共设置了两处,分别是“用向量法研究三角形的性质”和“杨辉三角的性质与应用”,不能充分体现探究活动的意义.而各类数量众多的“微型探究”活动则可以贯穿新教材

始终,能帮助学生了解概念和结论产生的过程,培养发现、提出、分析和解决数学问题的能力,建立严谨的科学态度和不怕困难的科学精神,进而发展数学学科核心素养.因此有必要比较不同版本新教材“预备知识”部分“微型探究”活动的设置情况,并对教材编写提出建议,以取长补短,充分发挥各个版本新教材“预备知识”部分对高一新生数学学科核心素养培养的重要作用.

## 1 核心概念界定

数学探究活动与一般的探究类似:针对某个课题,发现和提出有意义的数学问题,猜测合理的数学结论,提出解决问题的思路与方案,通过自主探索、合作研究论证数学结论.而微型数学探究指学生在一定指导下,经历猜想与验证的小型探究过程,是有



指导的数学发现活动. 在教材中,其可以存在于教材中的知识引入、概念获得、原理分析、问题解决等环节<sup>[2]</sup>. 微型探究要满足如下三个条件:①起点可以是真实问题,也可以是数学问题,还可以是数学结论;②终点是学生未知的知识或方法,学生通过探究活动经历“再创造”的过程;③关键点是科学探究方法与精神,即通过类比抽象和归纳概括方法推出某种可能性,并进行验证. 验证的方法包括演绎推理,还包括在更多的例子中检验猜想.

## 2 新教材中微型数学探究活动的文本分析

迄今为止,我国高中数学新教材已经有三个版本出版发行,包括人教 A 版、苏教版和北师大版. 本研究使用内容分析方法,依据刘云等人的数学探究

活动分析框架<sup>[3]</sup>,从探究所在栏目、探究内容、开放水平和探究方式四个方面对上述三个版本“预备知识”中的微型探究活动进行分析比较.

### 2.1 呈现微型数学探究活动的栏目统计

微型探究任务可以出现在教材的“新知引入与呈现”“课后习题”“拓展”等部分. 但是不同版本教材对相似环节的命名有一定差异,如人教 A 版在“新知引入与呈现”部分设置的探究环节名称多样,有“思考”“观察”“探究”以及没有明确栏目名称四种;而苏教版在这个部分则设置了“思考”栏目以及没有明确栏目名称的形式引出探究任务. 栏目具体分布情况如表 1 所示.

表 1 呈现微型数学探究活动的栏目统计

	新知引入与呈现				课后习题		拓展		总计	
	观察	思考(交流)	探究	实例分析	无明确栏目	阅读(与思考)	旁白	问题与探究		
人教 A 版	2	15	6	0	2	9	2	2	0	38
北师大版	0	11	0	1	0	7	0	0	0	19
苏教版	0	5	0	0	9	13	1	1	2	31

总体来看,人教 A 版和苏教版新教材更倾向于引导学生通过微型探究活动学习数学知识. 这是因为,从数量上看,北师大版微型探究性任务总数最少,仅为 19 处,低于人教 A 版的 38 处和苏教版的 31 处;从种类上看,三个版本新教材在预备知识部分一共有 9 个小栏目设置微型探究任务,北师大版只安排了 3 个栏目,低于人教 A 版(7 个)和苏教版(6 个).

### 2.2 微型数学探究活动的内容类型

从内容类型角度,微型数学探究活动分为“数学知识的探究”和“应用数学知识的探究”两类,其中“数学知识的探究”指向具体数学知识的学习,又分为“陈述性知识探究”和“程序性知识探究”两类. 陈述性知识探究指向数学陈述性知识的学习,而程序性知识探究则是对进行某项操作活动所需知识的探索. 如人教 A 版 1.2 节中“观察”栏目要求学生观察几个例子,类比实数之间的相等与大小关系以发现两个集合的关系,是对数学概念的探究,属于陈述性知识的探究活动;而人教 A 版 2.1 节中“思考”栏

目要求类比等式的基本性质,猜想不等式的基本性质,并加以证明,则是通过探究活动让学生经历抽象、概括、猜想、验证的数学探究方法,属于程序性知识的探究活动.

应用数学知识的探究活动指向数学知识的应用,根据应用的步骤是否已经告诉学生,是否给学生提供了可供模仿的对象,将应用数学知识的探究活动分为模仿性应用和创造性应用两类. 如苏教版习题 3.3 中的 15 题,首先提示学生可以将一元二次不等式求解问题化归为利用实数乘法法则推测因式符号的问题,再要求学生尝试用自己得出的方法求解其他一元二次不等式,是模仿性应用的典型例子;而人教 A 版 1.3 节的“阅读与思考”栏目中让学生设计一种比较两个无限集中元素个数多少的方法就属于对数学知识创造性应用的探究,因为学生之前不知道如何比较无限集元素个数,没有可供模仿的方法,需要提出猜测并加以证明才行.

根据上述分类,对三个版本高中数学新教材中微型探究性活动进行统计,结果如表 2 所示.

表 2 微型数学探究活动的内容类型统计

	陈述性知识	程序性知识	模仿性应用	创造性应用
人教 A 版	15(0.39)	9(0.24)	1(0.03)	13(0.34)
北师大版	4(0.21)	3(0.16)	3(0.16)	9(0.47)
苏教版	13(0.42)	3(0.10)	4(0.13)	11(0.35)



在人教 A 版高中数学新教材的“预备知识”部分,探索数学知识的任务(0.63)多于应用数学知识的探究活动(0.37);在苏教版中,两者基本持平;但是北师大版探索数学知识(0.37)的任务却少于应用数学知识的探究活动(0.63).在数学知识的探究任务中,三个版本新教材中陈述性知识探究所占比重都比较大.在应用数学知识的探究活动中,三个版本新教材中的模仿性应用探究活动均较少.这一结果与刘云等人在“高中数学必修教科书中的数学探究活动分析”一文中对人教 A 版高中数学教材研究结果相反,可能由于本研究将教材中已经明确告知学生解决问题的步骤的任务排除在探究性任务之外,仅包含需要学生首先自主抽象出解决方法再加以应用的任务,因此模仿性应用探究活动数量较少.

### 2.3 微型数学探究活动的开放水平

表 3 微型数学探究活动的开放水平统计

	问题起始型	证据起始型	结论起始型	论证起始型	平均开放水平
人教 A 版	1(0.03)	5(0.13)	31(0.82)	1(0.03)	2.16
北师大版	1(0.05)	2(0.11)	11(0.58)	5(0.26)	1.95
苏教版	0	2(0.06)	27(0.87)	2(0.06)	2

如表 3 所示,结论起始型的探究在每本教材中所占比例都最大,而问题起始型的探究占比最少.另外,按照探究任务的开放水平,分别对问题起始型、证据起始型、结论起始型、论证起始型赋值 4、3、2、1,通过加权平均得出人教 A 版新教材的平均开放水平 2.16,高于北师大版的 1.95 和苏教版的 2.

### 2.4 微型数学探究活动的完成方式

微型数学探究活动的完成方式,指在探究活动中验证猜想所需要的方法类型.其包括思想型探究活动,如苏教版 1.2 节的“思考”栏目,要求学生判断  $A \subseteq B$  与  $B \subseteq A$  能否同时成立,学生单纯依赖逻辑推理即可完成;观察型探究活动,如苏教版 1.2 节的引入环节,要求学生观察猜想第一组集合中集合 A 与 B 的关系,并在第二、三组中验证这一猜测,就是需在观察基础上进行抽象才能完成的探究活动;实验型探究活动,需要通过操作实验、观察抽象、并从收集的数据中验证假说.

表 4 微型数学探究活动的完成方式统计

	思想型	观察型	实验型
人教 A 版	31(0.82)	7(0.18)	0
北师大版	17(0.89)	2(0.11)	0
苏教版	20(0.65)	11(0.35)	0

从表 4 可知,三个版本新教材的“预备知识”部

高中数学新教材中探究活动的开放水平分为 4 个层次:问题起始型、证据起始型、结论起始型、论证起始型.如人教 A 版 1.5 节的“阅读与思考”栏目要求学生梳理等腰三角形、直角三角形、平行四边形的知识.相应地,学生需要自行提出问题:这些图形相关命题的充分、必要条件是什么?并猜测结论、寻找证据、进行论证,因此本探究任务属于问题起始型.而人教 A 版 1.4 节的“探究”栏目要求学生给出“四边形是平行四边形”的充要条件,是证据起始型的探究任务.人教 A 版 1.4 节的“思考”栏目:下列“若  $p$ , 则  $q$ ”形式的命题,哪些命题与它们的逆命题都是真命题,是结论起始型的探究任务.北师大版 3.2 节的“思考交流”栏目要求学生类比上述方法,说明面积为  $16 \text{ cm}^2$  的所有不同形状矩形中,边长为  $4 \text{ cm}$  的正方形的周长最小,则是论证起始型的探究任务.

分中微型数学探究活动的完成以思想型最多,观察型次之,实验型均没有.

## 3 思考与建议

### 3.1 北师大版应适当增加探索数学知识的任务

#### 一、交集与并集

##### 实例分析

1. 设集合  $A = \{x | x \text{ 是 } 6 \text{ 的因数}\}$ ,  $B = \{x | x \text{ 是 } 8 \text{ 的因数}\}$ ,  $C = \{x | x \text{ 是 } 6 \text{ 和 } 8 \text{ 的公因数}\}$ , 则集合 C 是由集合 A 与集合 B 的所有公共元素组成的.
2. 设集合  $D = \{x | -1 < x < 2\}$ ,  $E = \{x | x > 0\}$ ,  $F = \{x | 0 < x < 2\}$ , 则集合 F 是由集合 D 与集合 E 的所有公共元素组成的(如图 1-7).

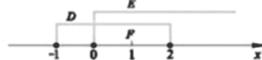


图 1-7

##### 抽象概括

一般地,由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合,叫作集合 A 与 B 的交集,记作  $A \cap B$ , 读作“ $A$  交  $B$ ”,即  $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$ .

可用 Venn 图(如图 1-8)表示.

根据交集的定义,对于任何集合 A, B, 有

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B, \quad A \cap A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$



图 1-8

### 图 1 北师大版新教材呈现概念的方式

如上所述,数学探究是培养学生核心素养的核心载体,但是北师大版新教材的“预备知识”部分较不重视使用探究活动引导学生学习.首先,从整体视角来看,其设置的探究活动的数量与栏目数量最少.其次,北师大版新教材在呈现概念和原理时,



很少设置探究性任务,往往首先给出若干个例子,紧接着给出确定的结论作为结尾,如图1所示。但是概念与原理是学习的核心和教学的重点,也是培养核心素养的重要载体。因此北师大版需要展示各种陈述性和程序性知识的探究过程、增加探索数学知识的任务。具体可参考苏教版的做法(如图2所示):

## 交集、并集

集合A在集合S中的补集 $\complement_S A$ 是由给定的两个集合A、S得到的一个新集合。这种由两个给定集合按照某种规则得到一个新集合的过程称为集合的运算。集合的交与并也是常见的两种集合运算。

观察下列各组集合:

- (1)  $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{-2, -1, 1\}$ ,  $C = \{-1, 1\}$ ;
- (2)  $A = \{x \mid x \leq 3\}$ ,  $B = \{x \mid x > 0\}$ ,  $C = \{x \mid 0 < x \leq 3\}$ ;
- (3)  $A = \{x \mid x \text{ 为矩形}\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{ 为菱形}\}$ ,  $C = \{x \mid x \text{ 为正方形}\}$ 。

● 集合A、B、C之间具有怎样的关系?

● 如何用数学语言表述这种关系?

观察(1),可以发现, $1 \in A$ 且 $1 \in B$ ,即元素1既属于集合A又属于集合B。这样的元素还有-1。所有这样的元素构成的集合就是 $C = \{-1, 1\}$ 。(2)(3)也具有这种特征。

这时称C是A与B的交集。一般地,

由所有属于集合A且属于集合B的元素构成的集合,称为A与B的交集(intersection set),记作 $A \cap B$ (读作“A交B”),即 $A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且} x \in B\}$ 。

图2 苏教版新教材呈现概念的方式

在给出若干个具体例子之后,抛出探究性任务:你能说出集合A、B、C之间的关系吗?此外,教材还引导学生思考:首先抽象出例(1)的数学本质特征,并在例(2)和例(3)中验证这一猜测,最终顺利完成一个数学知识的微型探究任务。

### 3.2 苏教版应当增加以“思想型”为完成方式的探究活动

三个版本新教材“预备知识”部分的微型探究活动均以“思想型”为主要完成方式,而且均没有设置“实验型”的探究活动。纵观中学数学教材的探究活动,以实验型作为完成方式的情况多见于使用信息技术手段验证,如人教A版5.5.1节中“利用信息技术制作三角函数表”。而“预备知识”部分并没有合适的探究内容可以使用信息技术,因此,三个版本在此部分均没有出现以“实验型”作为探究活动的完成方式。但是人教A版和北师大版中以“思想型”为完成方式的探究活动占比高于苏教版。考虑到初高中数学内容抽象程度不同,高中对逻辑严谨性要求更高<sup>[4]</sup>。而通过观察其他例子验证猜想的严谨性低于通过演绎性逻辑推理验证。为此,苏教版需要加大以“思想型”为完成方式的探究活动比例,以符合高中数学“预备知

识”部分对逻辑严谨性的更高要求。

### 3.3 三个版本均需增加模仿性数学应用探究活动,并提升开放水平

在应用数学知识的探究活动中,三个版本新教材中模仿性应用探究活动的设置均较少:人教A版占0.03、北师大版占0.16,在数学探究活动的四种内容类型中均占比最少;苏教版的模仿性数学应用探究占比0.13,虽然不是最低比例,但依旧处于下游水平。尽管创造性应用探究活动对学生问题解决能力及创新意识的培养作用更大,但难度也更大。而高难度的任务反而可能降低学习积极性。考虑到安排“预备知识”的目的之一在于使学生在克服困难、掌握知识、发展数学思维、提高数学能力的过程中培养数学学习兴趣,增强学好数学的自信心,养成良好的数学学习习惯<sup>[4]</sup>。因此三个版本均应该多设置一些难度稍低的模仿性数学应用的探究活动,让高一学生经历抽象他人解决问题方法的过程,并在更多的例子中验证自己抽象出的方法是否正确,这种数学应用探究活动的设置更能符合高一学生的数学现实以及教材安排“预备知识”的目的。

此外,对三个版本教材中微型数学探究活动的开放水平分析表明,结论起始型居多,问题起始型最少,说明教材给学生提供的探究空间并不大。这一结论与刘云在2012年得出的研究结论类似,也说明新教材“预备知识”部分在探究开放水平这方面并未有所改进。但是只有问题起始型探究活动能提供完整的科学探究过程,培养学生的创新能力,因此三个版本教材应注重对数学探究活动开放水平的提升,在“阅读与思考”等环节设置以数学问题提出为起点的探究活动。

### 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020:82.
- [2] 苏洪雨.基于问题设计的数学微探究评价体系构建[J].数学教育学报,2019,28(01):19-24.
- [3] 刘云,张广祥,黄永明等.高中数学必修教科书中的数学探究活动分析[J].数学教育学报,2012,21(05):76-79.
- [4] 章建跃.“预备知识”预备什么、如何预备[J].数学通报,2020,59(08):1-14.

作者简介 褚小婧(1984—),女,安徽灵璧人,教育学博士,副教授;主要研究数学教育学;主持省级和校级教学科研课题8项,发表论文10余篇。