创设数学实验问题　培养学生探究能力

200030　上海市第四中学　徐卫文

摘　要:笔者以数学实验问题为载体,为研究与获得某种数学理论、验证某种数学猜想、解决某种数学问题,运用一定技术手段,引导学生开展实验探究,通过观察分析数学现象,发现与探索数学知识的发生过程,构建新的知识结构,引发学生的数学实验探究.

关键词:数学实验;探究能力

实验是科学得以产生与发展的根本,而探究是当今社会科学发展与教育的有效方式.数学实验教学是再现数学发现过程的有效途径,数学中很多知识都有一定的规律和推广潜力,这些知识在精心设计下大部分可以通过实验探究的方式来学习获得.在数学的学习过程中,无论是概念、定理、法则、公式的学习,还是技能的学习、问题的解决,都需要实验.选择数学实验这种有效途径进行数学探究教学,恰好可以为学生提供动手操作、自主探究的机会.数学实验探究以数学实验问题为载体,为研究与获得某种数学理论、验证某种数学猜想、解决某种数学问题,运用一定的物质手段,引导学生开展知识探究,通过观察分析数学现象,调动知识储备与生活经验,发现与探索数学知识的发生过程,构建新的知识结构,引发学生积极的数学实验探究行为.

数学实验探究问题是基于教学内容提出的,是教学内容的拓展和延伸.问题设计要以培养学生自主探究能力为出发点,帮助学生了解知识的内在联系及基本规律,培养学生逻辑推理能力,提高学生分析问题和解决问题的能力,使学生形成良好的数学学习品质.例如,函数单调性、周期性及最值问题,函数间增长关系比较,求不同函数图像的交点个数问题,不定方程的求解,解析几何中的图形变换及轨迹探求问题,立体几何中的图形变换及展开,概率统计中的随机问题及回归分析等内容,都可以从激发学生探究兴趣、体验数学知识形成过程、强化数学知识应用、提高学生辩证思维能力等角度进行设计.

一、创设数学实验探究问题,激发学生的探究兴趣

根据教材特点,找准知识的切入点,充分挖掘和精心设计能够激发学生探究兴趣的数学实验探究问题,为学生创造自主探索、自主交流的机会,激发学生学习数学的兴趣,拓宽学生思维,促进学生实践能力和创新意识的发展,培养学生的探究能力.

案例1:动圆与两个定圆相切时,探求动圆圆心的轨迹问题

(一)实验问题设计意图

由于与两定圆相切的动圆圆心轨迹涉及问题较为复杂,因此,创设实验平台,利用多媒体技术手段可以帮助学生透过现象把握问题的本质,让学生真实感知轨迹的性质,并从观察、猜想、验证中感受数学研究的全过程,通过分情况进行探究,并得出结论.

(二)实验工具

几何画板(或TI图形计算器等).

(三)实验探究活动设计

动圆P与两定圆F_1和F_2均相切,难点在于动圆的运动变化和两定圆之间位置关系的相对变化,可分为四种情况进行实验探究.

1. 动圆P与定圆F_1和F_2均内切.
2. 动圆P与定圆F_1和F_2均外切.
3. 动圆P与定圆F_1外切,与定圆F_2内切.
4. 动圆P与定圆F_1内切,与定圆F_2外切.

上述四种情况还要根据定圆F_1和F_2的位置关系再细分两到三种情况进行探究(如表1所示).

本案例借助几何画板,通过改变两圆的位置关系,学生探索动圆圆心的轨迹可能是椭圆、双曲线、射线等.设计的目的在于突出学生的主体地位,培养学生动手操作、观察、研究、思考的探究能力,有效拓展学生学习的空间以及解决问题的态度、深度、广度和灵活度,激发学生的探究兴趣.

二、创设数学实验探究问题,体验数学知识的形成过程

创设数学实验探究问题,让学生体验一些数学概念、公式、定理、公理、结论以及知识的形成过程,引导学生由直观现象归纳、探索数学知识,或通过数学实验教学的可视化验证数学结论,由此充分调动学生的主动性和创造性,激起学生的好奇心和求知欲.

表 1

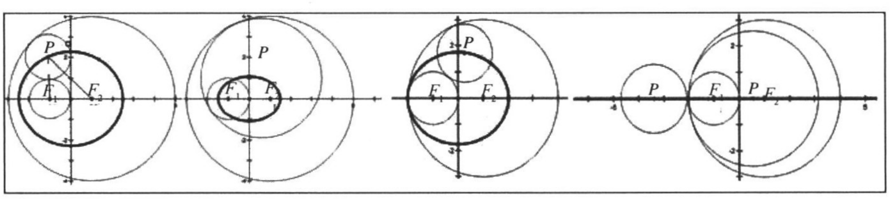
学生探究 1：动圆 P 与两定圆 F_1 和 F_2 之间的位置关系

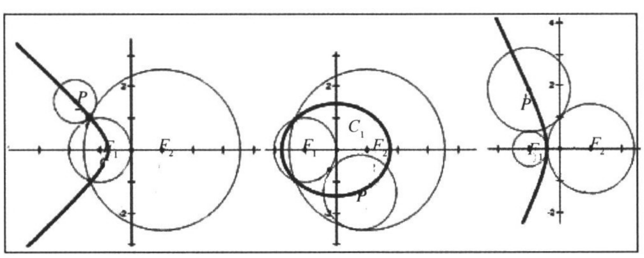
(1)探究两定圆之间的位置关系(不妨设定圆 F_1 半径为 r_1，定圆 F_2 半径为 r_2，且 $r_1>r_2$).

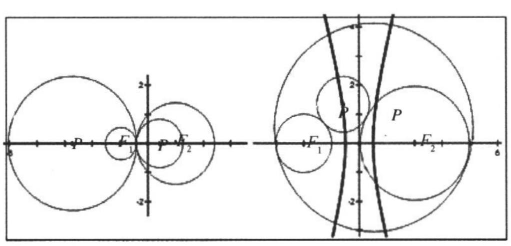
(2)探究动圆与两定圆之间的位置关系.

序号	两定圆 F_1 和 F_2 位置关系	动圆 P 与两定圆 F_1 和 F_2 的位置关系
第一组	两定圆 F_1 和 F_2 内含	与圆 F_1 内切，与圆 F_2 外切
		与定圆均内切
第二组	两定圆 F_1 和 F_2 内切	与圆 F_1 内切，与圆 F_2 外切
		与两定圆均内切
		与两定圆均外切
第三组	两定圆 F_1 和 F_2 相交	与两定圆均外切
		与两定圆均内切
		与圆 F_1 内切，与圆 F_2 外切
		与圆 F_1 外切，与圆 F_2 内切
第四组	两定圆 F_1 和 F_2 外切	与两定圆均外切
		与两定圆均内切
		与圆 F_1 内切，与圆 F_2 外切
		与圆 F_1 外切，与圆 F_2 内切
第五组	两定圆 F_1 和 F_2 相离	与两定圆均外切
		与两定圆均内切
		与圆 F_1 内切，与圆 F_2 外切
		与圆 F_1 外切，与圆 F_2 内切

学生探究 2：借助几何画板探究动圆圆心轨迹







（续表）

学生探究3：动圆圆心 P 的轨迹以及轨迹方程探究

(1)根据两定圆位置关系，探究构建两定圆方程.

(2)根据动圆与两定圆的位置关系，探究动圆圆心 P 的轨迹以及轨迹方程.

两定圆 F_1 和 F_2 位置关系		动圆 P 与两定圆 F_1 和 F_2 位置关系(设动圆半径为 R，定圆 F_1 半径为 r_1，定圆 F_2 半径为 r_2，且 $r_1>r_2$)		探究动圆圆心 P 的轨迹以及方程
定圆位置关系	定圆方程设计	动圆与两定圆位置关系	数量关系推导	
两定圆 F_1 和 F_2 内含	圆 $F_1:(x-3)^2+y^2=100$ 圆 $F_2:(x+3)^2+y^2=4$	与圆 F_1 内切 与圆 F_2 外切	$\|PF_1\|=10-R,\|PF_2\|=R+2$ $\Rightarrow\|PF_1\|+\|PF_2\|=12$	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$
		与两定圆均内切	$\|PF_1\|=10-R,\|PF_2\|=R-2$ $\Rightarrow\|PF_1\|+\|PF_2\|=8$	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$
两定圆 F_1 和 F_2 内切	圆 $F_1:(x-1)^2+y^2=9$ 圆 $F_2:(x+1)^2+y^2=1$	与圆 F_1 内切 与圆 F_2 外切	$\|PF_1\|=3-R,\|PF_2\|=R+1$ $\Rightarrow\|PF_1\|+\|PF_2\|=4$	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$
		与两定圆均外切	$A(-2,0),\|PA\|=R$	$y=0(x<-2)$
		与两定圆均内切	$A(-2,0),\|PA\|=R$	$y=0(x>-2,x\neq\pm1)$
两定圆 F_1 和 F_2 相交	圆 $F_1:(x+4)^2+y^2=64$ 圆 $F_2:(x-4)^2+y^2=4$	与两定圆均外切	$\|PF_1\|=R+8,\|PF_2\|=R+2$ $\Rightarrow\|PF_1\|-\|PF_2\|=6$	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1(x>3\frac{3}{4})$
		与两定圆均内切	$\|PF_1\|=8-R,\|PF_2\|=2-R$ $\Rightarrow\|PF_1\|-\|PF_2\|=6$	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1(3\leqslant x<3\frac{3}{4})$
			$\|PF_1\|=R-8,\|PF_2\|=R-2$ $\Rightarrow\|PF_2\|-\|PF_1\|=6$	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1(x\leqslant1)$
		与圆 F_1 内切 与圆 F_2 外切	$\|PF_1\|=8-R,\|PF_2\|=R+2$ $\Rightarrow\|PF_2\|+\|PF_1\|=10$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1(-5\leqslant x<3\frac{3}{4})$
		与圆 F_1 外切 与圆 F_2 内切	$\|PF_1\|=8+R,\|PF_2\|=2-R$ $\Rightarrow\|PF_2\|+\|PF_1\|=10$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1(3\frac{3}{4}<x\leqslant5)$
两定圆 F_1 和 F_2 外切	圆 $F_1:(x+2)^2+y^2=9$ 圆 $F_2:(x-2)^2+y^2=1$	与两定圆均外切	$\|PF_1\|=3+R,\|PF_2\|=R+1$ $\Rightarrow\|PF_1\|-\|PF_2\|=2$	$x^2-\frac{y^2}{3}=1(x>1)$
		与两定圆均内切	$\|PF_1\|=R-3,\|PF_2\|=R-1$ $\Rightarrow\|PF_2\|-\|PF_1\|=2$	$x^2-\frac{y^2}{3}=1(x\leqslant-1)$
		与圆 F_1 外切 与圆 F_2 内切	$\|PF_1\|=R+3,\|PF_2\|=R-1$ 或 $1-R$ $\Rightarrow\|PF_2\|-\|PF_1\|=4=\|F_1F_2\|$ 或 $\|PF_2\|+\|PF_1\|=4=\|F_1F_2\|$	$y=0(x>1$ 且 $x\neq2)$
		与圆 F_1 内切 与圆 F_2 外切	$\|PF_1\|=R-3$ 或 $3-R,\|PF_2\|=R+1$ $\Rightarrow\|PF_2\|-\|PF_1\|=4=\|F_1F_2\|$ 或 $\|PF_2\|+\|PF_1\|=4=\|F_1F_2\|$	$y=0(x<1$ 且 $x\neq-2)$

（续表）

两定圆 F_1 和 F_2 相离	圆 $F_1:(x-2)^2+y^2=4$ 圆 $F_2:(x+2)^2+y^2=1$	与两定圆均外切	$\|PF_1\|=2+R,\|PF_2\|=1+R$ $\Rightarrow\|PF_1\|-\|PF_2\|=1$	$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{15}{4}}=1(x\leqslant-\frac{1}{2})$
		与两定圆均内切	$\|PF_1\|=R-1,\|PF_1\|=R-2$ $\Rightarrow\|PF_2\|-\|PF_1\|=1$	$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{15}{4}}=1(x\geqslant\frac{1}{2})$
		与圆 F_1 外切 与圆 F_2 内切	$\|PF_1\|=R+2,\|PF_2\|=R-1$ $\Rightarrow\|PF_1\|-\|PF_2\|=3$	$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{7}{4}}=1(x\leqslant-\frac{3}{2})$
		与圆 F_1 内切 与圆 F_2 外切	$\|PF_1\|=R-2,\|PF_2\|=R+1$ $\Rightarrow\|PF_2\|-\|PF_1\|=3$	$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{7}{4}}=1(x\geqslant\frac{3}{2})$

案例2:棱锥体积的探究

(一)实验设计意图

使学生深刻理解三棱锥体积公式的推导过程，掌握三棱锥体积公式并能运用公式进行计算或论证，培养学生动手、动脑、发现问题、分析问题、解决问题的能力，同时渗透转化、类比等数学思想方法.本实验的设计以实物的方式使学生获得感性认识，在感性上得到认可，再从数学的严密性和精确性角度证明该公式.

(二)实验方法

方案1:利用模型操作(排液法或称重法或割补法)完成体积测量.

方案2:利用课件进行模拟实验.

(三)实验过程

方案1(实物操作):

1.测一测、量一量

利用等底等高的三棱柱、三棱锥以及细沙探究两个容器的关系.运用实物模型演示三棱锥和三棱柱体积的装沙实验，在三棱锥体杯子里装满细沙，倒入三棱柱体的模具中，反复操作，发现恰好三次倒满.

2.切一切、割一割

取一个三棱柱的几何体(萝卜块)进行切割，用称重法或排液法判断切割后的三个三棱锥的体积关系.

方案2(利用课件进行模拟实验):

借助几何画板演示，将三棱柱分割成三个三棱锥，利用动态作图、动态测量等功能，可以将抽象性的空间结构关系直观生动地显示出来，在动态的过程中培养学生观察、发现问题的能力，给学生提供探索的空间.

(四)实验证明思路

先将三棱锥补成一个三棱柱，再将这个三棱柱分割成三个三棱锥，接着证明三个三棱锥体积相等(证明略).(如图1—图3所示)

高中数学中的许多公式和定理的发现都来源于实验，在棱锥的体积实验探究教学中，引导学生通过观察、实验探究、归纳猜想、理论证明这一完整的数学探究过程得到棱锥的体积公式.学生不仅能较容易地了解棱锥的体积公式，同时也加深对数学公式的理解，培养形成“实验操作—直觉猜想—直观验证—推理论证”的科学探究方法.

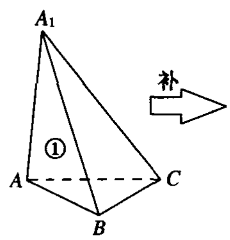


图1

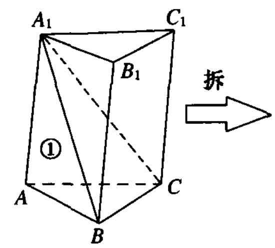


图2

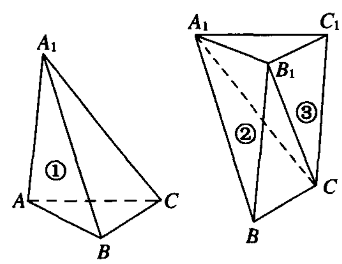


图3

三、创设数学实验探究问题，强化数学知识的应用能力

创设数学实验探究问题，将现实问题转化为具体的数学问题，用数学知识与方法构建数学模型，解决现实问题，增强学生的应用意识，提高实践能力.在实际情境中发现问题、提出问题;通过分析问题建立数学模型;借助信息手段分析数据、求解模型、得出结论，并尝试基于现实背景验证模型结果、改进模型、完善模型，提高学生运用数学解决实际问题的探究能力.

案例3:水槽问题设计

现有宽为 a 的长方形板材，在单位时间水流速度一定的情况下，请将它设计成一开口水槽，使水槽的流量最大.(备注:在单位时间内水流速度一定的情况下，水流量的大小取决于水槽横截面的面积，水

槽形状的选择又与实际条件限制和使用者的喜好有关.如果不考虑实际条件限制和使用者喜好,则可以对形状进行多种选择.)

学生设计的水槽横截面图形如图4所示.

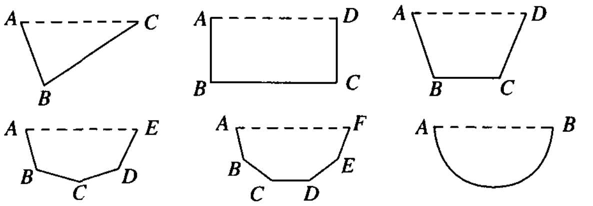


图4

学生问题探究过程中的分析如表2所示.

在建模过程中,学生培养了学习习惯、观察视角、思考方法、思维方式、探索精神和创新能力,提高了数学应用能力.通过创设数学实验探究问题,不断加强数学应用意识的培养,学生体会数学与数学应用,促进全面发展.

四、创设数学实验探究问题,提高学生的辩证思维能力

引导学生从复杂的现象中把握事物的本质及规律,探索事物间的联系与差异,将已有事实变更推广为更有深度的结论等,启迪思维,提高学生的数学思维品质.

从学生已有的数学知识经验和惯性思维角度创设数学实验探究问题,通过一定量的特殊情形的实验观察来总结和归纳,在此基础上进行合情的推理、猜想、证明,发现和掌握数学概念、定理、结论等规律,克服抽象性结论和复杂推理证明中形成的认知障碍.

案例4:互为反函数的图像交点个数问题

探究指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)图像交点个数问题(以同一底数的指、对函数图像为例).

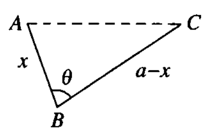
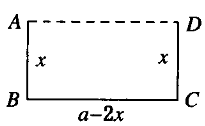
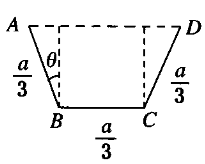
(一)设计意图

面对函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)图像交点个数问题,大多数学生的掌握不够清楚,受思维定势的影响,不少学生会随手作出它们的简图.例如,当 $a>1$ 时,如图5-1,它们没有交点;当 $0<a<1$ 时,如图5-2,它们有且仅有一个交点.其错误的根源在于忽视了底数 a 的变化对图像以及交点个数的影响.

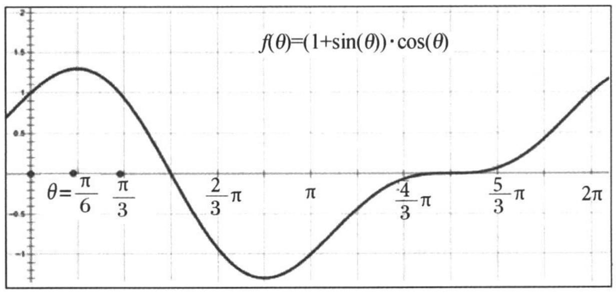
(二)实验工具

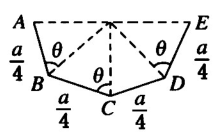
几何画板或TI图形计算器等.

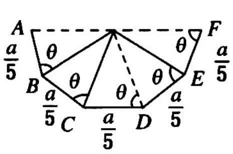
表2

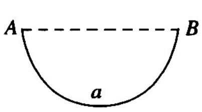
类别	学生图形设计	建立模型,求最值
三角形		生1: (1)模型设计,将图形设计成三角形. (2)根据图形,设 $AB=x$,$BC=a-x$,$\angle ABC=\theta$,所以横截面面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot x(a-x)\cdot\sin\theta$. (3)求横截面面积最值 $S=\frac{1}{2}\cdot x(a-x)\sin\theta\leqslant\frac{1}{2}x(a-x)=\frac{a^2}{8}-\frac{1}{2}\cdot(x-\frac{a}{2})^2\leqslant\frac{a^2}{8}$, 当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 且 $x=\frac{a}{2}$ 时,$S_{\max}=\frac{a^2}{8}=0.125a^2$.
四边形		生2: (1)设计意图:将图形设计成特殊的四边形(矩形). (2)根据图形,设 $AB=CD=x$,$BC=a-2x$,所以横截面面积为 $S=x(a-2x)$. (3)求横截面面积最值 $S=x(a-2x)$,推得 $S=\frac{a^2}{8}-2(x-\frac{a}{4})^2\leqslant\frac{a^2}{8}$, 当 $x=\frac{a}{4}$ 时,$S_{\max}=\frac{a^2}{8}=0.125a^2$.
		生3: (1)设计意图:将图形设计成特殊的四边形(等腰梯形). (2)根据图形,可得 $AB=BC=CD=\frac{a}{3}$,设 $\angle ABE=\theta$,所以横截面面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot(\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+2\cdot\frac{a}{3}\cdot\sin\theta)\cdot\frac{a}{3}\cos\theta=\frac{a^2}{9}\cdot(1+\sin\theta)\cdot\cos\theta$. (3)求横截面面积最值 $S=\frac{1}{2}\cdot(\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+2\cdot\frac{a}{3}\cdot\sin\theta)\cdot\frac{a}{3}\cos\theta=\frac{a}{9}\cdot(1+\sin\theta)\cdot\cos\theta$, 求 S 最值问题,等价于求 $f(\theta)=(1+\sin\theta)\cdot\cos\theta$ 最值问题, 方法1:图形直观分析,借助几何画板对 $f(\theta)=(1+\sin(\theta))\cdot\cos(\theta)$ 进行分析.

（续表）

<table>
<tr><th>类别</th><th>学生图形设计</th><th>建立模型,求最值</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>


函数 $y=f(\theta)$ 在一个周期 $\theta\in[0,2\pi]$ 的图像如上图所示,当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时,$y=f(\theta)$ 取到最大值.
方法2:从求导的角度进行数学分析(教师指导证明).
$y'=-\sin\theta+\cos2\theta=-2\sin^2\theta-\sin\theta+1$,
令 $y'=0$,得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\sin\theta=-1$,即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ ($\theta=\frac{3\pi}{2}$ 舍),
$S_{\max}=\frac{\sqrt{3}a^2}{12}\approx0.144a^2$.
方法3:从不等式的角度进行证明(教师指导证明).
$y=(1+\sin\theta)\cos\theta=\cos\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta=\frac{1}{2}(\cos\theta+\cos\theta+\sin2\theta)$
$=\frac{3}{2}\left[\frac{\cos\theta+\cos\theta+\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}{3}\right]\leqslant\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\theta+\theta+\frac{\pi}{2}-2\theta}{3}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{3}$,
当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{2}-2\theta$ 时等号成立,即 $\theta=\frac{\pi}{6}$.
也有学生设计 $AB=CD=\frac{a}{4}$,$BC=\frac{a}{2}$ 或 $AB=CD=\frac{3a}{8}$,$BC=\frac{a}{4}$ 等,方法类似,不再展开.
</td></tr>
<tr><td>五边形</td><td>


</td><td>生4:图形设计比较特殊,将图形分成四个全等的等腰三角形,由图可得每个三角形的顶角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,则底角 $\theta=\frac{3\pi}{8}$,所以横截面面积为 $S=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{8}\cdot\tan\theta=\frac{a^2}{16}\cdot\tan\frac{3\pi}{8}\approx0.151a^2$.</td></tr>
<tr><td>六边形</td><td>


</td><td>生5:
设计意图:图形设计比较特殊,将图形分成五个全等的等腰三角形,由图可得每个三角形的顶角为 $\theta=\frac{\pi}{5}$,则底角 $\alpha=\frac{2\pi}{5}$,所以横截面面积为 $S=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{5}\cdot\frac{a}{10}\cdot\tan\theta=\frac{a^2}{20}\cdot\tan\frac{2\pi}{5}\approx0.154a^2$.</td></tr>
<tr><td>半圆</td><td>


</td><td>生6:
将图形设计成半圆形,由图可得横截面面积为
$S=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{a}{\pi})^2=\frac{a^2}{2\pi}\approx0.159a^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">探究得到的结论:设计的图形越特殊,面积相对来说越容易求解;图形的边数越多,其对应的图形面积越大,最终以半圆围成的图形横截面面积最大.</td></tr>
</table>

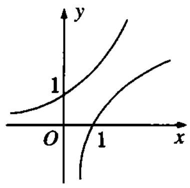


图 5-1

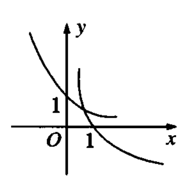


图 5-2

(三)实验探究问题设计

1. 函数 $y=\log_{\frac{1}{16}}x$ 与 $y=(\frac{1}{16})^x$ 的交点有几个?

问题分析:交点至少有 2 个,学生能直接求出的交点为$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$,$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$.

2. 借助实验工具(几何画板或 TI 图形计算器)进行观察,举例说明 a 取不同的值时,函数 $y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 的图像交点情况.

问题分析(直观判断):借助几何画板可以直观观察和探讨图像的交点个数问题(如表 3 所示).

3. 在问题 2 探索的基础上,当 a 取不同的值时,探究函数 $y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 的图像交点个数.

问题分析(数学验证):借助几何画板,对 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$图像的交点问题进行实验探究,归纳交点的大致情况,对交点情况进行严谨的验证和推理,验证如下.

(1)当 $a>1$ 时

若函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 相交只有一个交点,由互为反函数关系可知它们的图像关于 $y=x$ 对称,所以要使 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 图像有且只有一个公共点时,则 $y=x$ 是两个函数的共同的切线,设两个函数相切时的切点坐标为 $A(x_1,y_1)$,由于曲线 $y=a^x$ 在 A 处的切线斜率为 1,所以 $a^{x_1}=x_1$,且函数 $y=a^x$ 的导数为 $y'=(a^x)'=a^{x_1}\ln a=1$.

$\therefore\begin{cases}a^{x_1}=x_1\\a^{x_1}\ln a=1\end{cases}$,推得 $a=e^{\frac{1}{e}}$,故 $x_1=e$.

从上可知,当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 相切于 $A(e,e)$,所以 $a>1$ 时有以下三种情况.

①如图 6,当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 图像有一个交点.

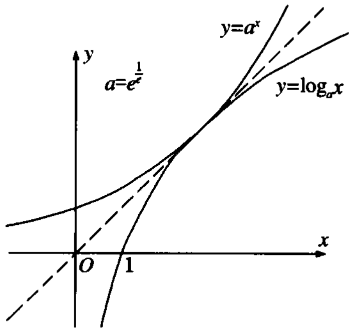


图 6

②如图 7,当 $a\in(1,e^{\frac{1}{e}})$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 图像有两个交点.

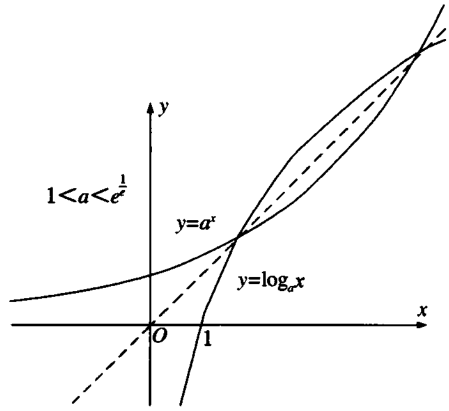


图 7

③如图 8,当 $a\in(e^{\frac{1}{e}},+\infty)$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 图像没有交点.

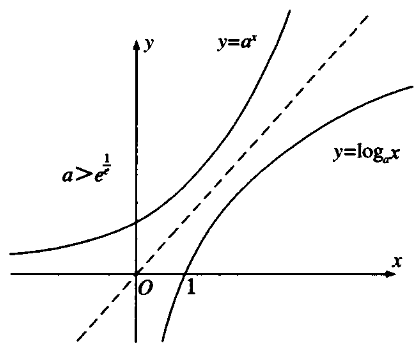


图 8

(2)当 $0<a<1$ 时

同理可得曲线 $y=a^x$ 在 A 处的切线斜率为 -1,所以 $a^{x_1}=x_1$,且函数 $y=a^x$ 的导数为 $y'=(a^x)'=a^{x_1}\ln a=-1$.

$\therefore\begin{cases}a^{x_1}=x_1\\a^{x_1}\ln a=-1\end{cases}$,推得 $a=(\frac{1}{e})^e$,故 $x_1=\frac{1}{e}$.

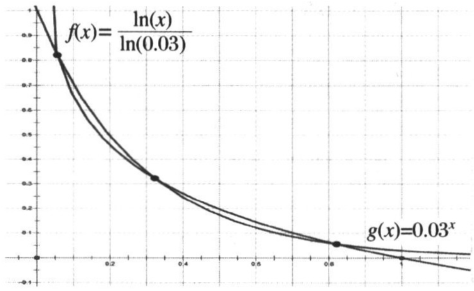
从上可知,当 $a=(\frac{1}{e})^e$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 相切于 $A(\frac{1}{e},\frac{1}{e})$,所以 $0<a<1$ 时,有以下两种情况.

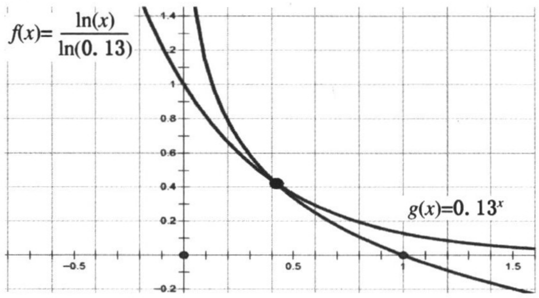
①当 $a\in(0,(\frac{1}{e})^e)$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 图像有三个交点.

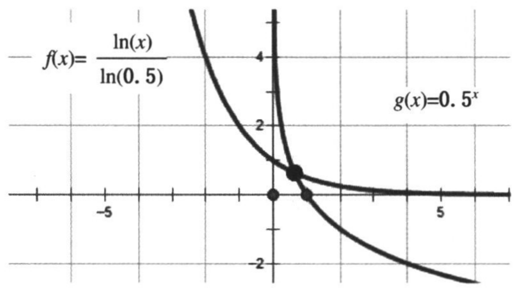
②当 $a\in[(\frac{1}{e})^e,1)$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 图像有一个交点.

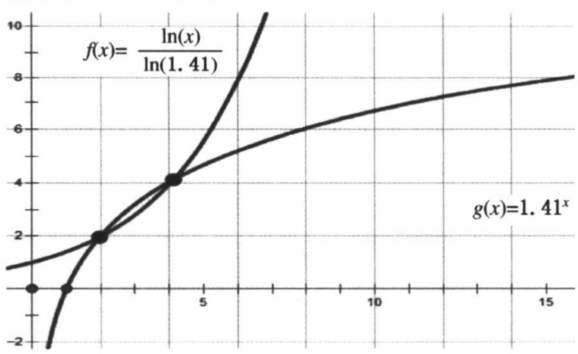
如果不借助实验工具,仅靠手工作图难以作出 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 交点,更难以判断出交点的个数情况,由此会给逻辑推理、验证结论带来一定的困难.因此,借助数学实验工具如几何画板等,引导学生在图形的动态变化中观察现象、读取数据、探索图

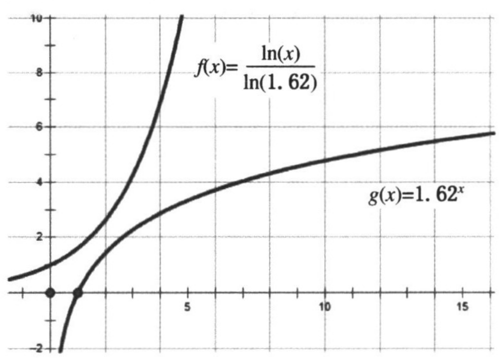
表3

<table>
<tr><th>a 的取值</th><th>借助于几何画板探究图像交点</th><th>交点个数</th></tr>
<tr><td>$a=0.03$</td><td>


</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$a=0.13$</td><td>


</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$a=0.5$</td><td>


</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$a=1.41$</td><td>


</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$a=1.62$</td><td>


</td><td>0</td></tr>
</table>

（下转第34页）

$\in \mathbf{R}\}$，考虑当$\lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0$，且$\lambda+\mu=1$时，$A,B,P$三点共线（用三点共线的充要条件可判断），则$\lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0$，且$\lambda+\mu \leqslant 1$时，点$P$必在$\triangle OAB$内（包括边界），考虑$|\lambda|+|\mu| \leqslant 1, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$的其他情形，点$P$的集合恰好是以$AB$为一边，以$OA,OB$为对角线一半的矩形，其面积$S=4S_{\triangle OAB}=4\times 2\times 2\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$.

评注：解法1从坐标的角度考虑，先建立平面直角坐标系，利用题设条件得点P的坐标x,y与λ,μ之间的关系，利用$|\lambda|+|\mu| \leqslant 1, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$得到关于$x,y$的不等式组，将问题转化为线性规划问题解答，这是典型的坐标法，是研究解析几何问题最基础、最常用的方法，完全通过代数运算，运算量较大，得到最终结果需要较强的数学运算能力，这对提升学生的数学运算素养是有利的.解法2从平面向量基本定理入手，结合三点共线的充要条件去思考构成平面点集的区域图形的形状，巧妙地避开了繁杂的运算，不失为一种优美解法，但这种方法体现较强的构造性，对学生的思维水平要求较高，要求学生对向量知识有系统的认识和深入的理解.

数学问题求解的基本思维方法是从题设条件出发寻找解题的方向.在决断解题方法时，对题设条件的思维切入点不同，解题的方法也将不尽相同.对于一类有几何背景的向量题，在寻找解题思路时，应牢牢把握向量的两个基本特征：利用“数”的特征，可以从向量的线性运算、数量级、基底分解与坐标运算等方面切入，将问题转化为代数运算来解决；利用“形”的特征，通过向量的几何意义及向量的运算将其转化为平面几何中的问题，直接利用平面几何中的相关结论得到结果.教师在教学中，要注重直观想象与数学运算素养的培养，这样学生才能熟练地实现向量的符号表示形式向图形表达形式、坐标表示形式的转化，优化向量问题解法.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准：2017年版[S].北京：人民教育出版社，2018.

[2] 李金兴.一题多解生枝干、一问多变叶满枝——一道向量题的多种解法及教学感悟[J].数学教学，2015(7).

[3] 蔡小雄.更高更妙的高中数学思想与方法[M].杭州：浙江大学出版社，2016.

（上接第25页）

像之间的关系，随后进行逻辑推理和结论验证，克服思维定势、封闭的状态，将知识融会贯通，从而使其发现和提出数学问题，分析和探讨数学问题，培养学生的逻辑思维能力、问题解决能力、创新思维能力.

创设数学实验探究问题，通过假设、猜想、归纳、推理、佐证、拓展等一系列探究活动，学生体验数学知识形成过程，学会思考、发现和探索，提高学生以数学的眼光观察世界的意识，逐步培养学生认识事物、发现真理的方法，学生在获得大量知识经验的同时又掌握了数学基本技能和数学思想方法，培养了创新能力，提高了数学素养.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准：2017年版[S].北京：人民教育出版社，2018.

[2] 汪昌辉，朱伟卫.基于DIMA平台的高中数学实验教学研究[M].上海：上海科学普及出版社，2017.

[3] 朱伟卫.基于DIMA平台的高中数学实验课程建设与实施[J].教育参考，2017(5).

[4] 冯伟贞.高中数学实验活动选编[M].北京：科学出版社，2016.

[5] 龚雪霜.数学实验在高中数学探究教学中的应用研究[D].重庆：重庆师范大学，2016.

[6] 林海斌，胡江.基于实验的探究教学开发[J].数学教育，2009(4)：61.

[7] 徐彦辉.数学探究教学的价值探析[J].数学通报，2004(1)：25.

[8] 何小亚.数学应用题教学的实践与思考[J].数学通报，2000(4).

[9] 李仕群.信息技术促进高中数学核心素养的提升[J].科教导刊，2021(3).