多渠道培养思维发散性 落实学生数学核心素养

缪苇伟
江苏省丰县中学　221700

［摘　要］高中阶段正值学生思维发展的飞跃期，教师必须抓住这个飞跃期，采用多种教学方法和教学手段来发展学生的数学思维，提升学生的数学思维品质，继而实现“教”与“学”的可持续发展. 在培养发散性思维的过程中，教师应遵循“以生为本”的教学理念，为学生提供一个自由的、广阔的自我展示的舞台，从而让不同的学生获得不同的发展，培养学生良好的学习习惯和思维品质.

［关键词］数学思维；思维品质；发散性思维

在实际教学中发现，很多学生因为难以适应高中阶段的学习节奏而成绩下滑，究其主因与初中的“讲授”式教学息息相关. 相比较而言，初中数学与高中数学在思维上有较大的差距. 在初中阶段，学生可以依赖讲授和模仿解决问题，但到了高中阶段，学习内容更加复杂、深刻，数学题目更加灵活多变，对思维能力提出了更高的要求. 因此，在高中阶段，教师要重视学生思维品质的培养.

思维的发散性是思维品质的重要组成部分之一，其建立于思维的广阔性和深刻性的基础上，又为思维的敏捷性和独创性创造了条件. 周知，无论是生活还是学习，若想发展就需要打破常规，开拓创新，而这些都离不开发散性思维，所以在高中数学教学中应重视学生发散性思维的培养. 在实际教学中，教师应引导学生从不同的角度去分析问题，用发展的眼光去看待问题，鼓励学生提出解决问题的新思路、新想法、新方案，这样既有利于问题的解决，又有利于学生的发展和核心素养的提升.

利用多种解法培养发散性思维

在教学过程中，教师要打破中规中矩的“讲授”模式，为学生提供一个能够平等交流的学习环境，充分发挥个体思维差异的优势，鼓励学生从不同角度思考问题，寻求不同的方案解决问题，以此培养思维的灵活性，培养发散性思维.

例1 求证：$\frac{1-\cos2\theta+\sin2\theta}{1+\cos2\theta+\sin2\theta}=\tan\theta$.

例1难度不大，但是证法灵活，在证明过程中教师预留充足的时间让学生思考和交流，并鼓励学生用不同的方法加以证明. 通过生生的积极交流和教师的耐心指导，学生得到了如下证明方法：

证法1（二倍角公式）：等式左$=\frac{2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}=$等式右.

证法2（万能公式）：设$\tan\theta=t$，则等式左$=\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{2t^2+2t}{2t+2}=t=$等式右.

证法3（正切半角公式）：由$\tan\theta=\frac{1-\cos2\theta}{\sin2\theta}=\frac{\sin2\theta}{1+\cos2\theta}$，利用合分比性质，命题得以证明.

给出多种解法后，教师可以引导学生对过程进行反思小结，这样既让学生理解和掌握证明三角形恒等式的基本方法，又拓展学生的思路，培养学生的发散性思维，让学生的解题能力和思维品质都得到较大程度的提升.

利用开放性问题培养发散性思维

在教学中发现，学生面对一些开放性问题时常束手无策，出现这一现象的原因与教师的“教”息息相关. 在课堂教学中，大多是教师提出问题，学生回答问题，这样以“师问生答”为主流的教学模式影响了学生提出问题能力的提升，限制了学生思维能力的发展. 在教学中，教师应为学生创设一个开放的学习环境，引导学生提出问题和解决问题，以此提升学生的自主学习能力.

例2 已知$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$①，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{4}$②，由此你能得到什么结论？

教师让学生独立探究，然后分享各自的发现.

生1：将①式和②式平方相加，可得$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{263}{288}$.

生2：将①式和②式相乘，再和差化积，得$\sin(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+1]=\frac{1}{12}$. 结合

作者简介：缪苇伟（1986—），本科学历，中小学一级教师，从事高中数学教学研究工作.

生1的结论,可得$\sin(\alpha+\beta)=\frac{24}{25}$.

生3:将①式和②式平方后作差,再和差化积,得$2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+1]=-\frac{7}{144}$. 又$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{263}{288}$,代入可得$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{7}{25}$.

生4:由①÷②,再和差化积约去公因式,可得$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4}{3}$,利用万能公式可求$\sin(\alpha+\beta)$,$\cos(\alpha+\beta)$,$\tan(\alpha+\beta)$的值.

生5:由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$消去$\alpha$,得$4\sin\beta+3\cos\beta=\frac{25}{24}$;同理,由$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$消去$\beta$,得$4\sin\alpha+3\cos\alpha=\frac{25}{24}$.

……

从以上过程可以看出,学生通过各种手段处理已知信息,能有效锻炼各自思维;通过对问题结论进行发散,能有效激发学生的潜能,有利于培养学生的创造力.

利用多个变式培养发散性思维

变式是培养发散性、创造性和深刻性思维的重要手段. 在教学中,通过变化已知、变化结论,引导学生从不同角度思考问题,应用不同方法和不同知识解决问题,有利于提高学生的思维品质.

例如,已知等差数列的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d$,显然该公式有四个变量,如果知道三个变量可利用解方程的思路求第四个量. 如"$\{a_n\}$为等差数列,$a_1=1$,$d=-2$,问-9是第几项""$\{a_n\}$为等差数列,$a_1=1$,$a_8=22$,求d",等等. 解决问题后,教师可以引导学生改编题目. 题目改编并不是随意改值那么简单,需要学生全面掌握变量的取值范围、变量间的内在联系、公式适用条件等内容,这样才能确保问题是科学性的、合理性的,否则,若学生不进行思考、辨析,只是信手拈来,可能闹出笑话. 如有学生设计了这样一个问题:"$\{a_n\}$ 为等差数列,$a_1=1$,$d=-3$,问-9是第几项?"学生将原题中的"$d=-2$"改成"$d=-3$",根据公式可求-9为$\frac{13}{3}$项,显然改编该题因忽视了变量的取值范围而造成了错误. 但是,通过题目改编不仅能深化学生对等差数列公式的理解,而且能让学生站在更高的角度看待问题,有利于提高学生的学习能力和思维能力.

利用多种品质培养发散性思维

各种思维品质是相关沟通、相互联系的,比如思维的发散性建立在思维的深刻性和广阔性的基础上,又服务于思维的敏捷性和独创性,同时借助思维的发散性又能达到深化理解,培养思维的深刻性的目的,可见各种品质彼此联系,密不可分. 因此,教学中教师可以借助其他思维品质的提高来培养学生思维的发散性.

1. 思维的深刻性

思维的深刻性集中表现在透过事物的现象发现本质,揭示规律. 数学知识间存在着一定的联系,只有深刻地理解知识,认清问题的本质,才能理清问题的来龙去脉,从而灵活应用相关知识解决问题.

例3 方程$\sin x=\lg x$的解有________.

学生习惯从方程的角度出发思考并解决该问题,而该问题由此出发无法求解,故学生常束手无策. 若解题时学生能够换个角度进行思考,会获得柳暗花明的效果. 求解时可以将问题转化为求函数$y=\sin x$与$y=\lg x$图像的交点问题,通过数形结合法能高效快速地解决问题. 在解决问题的过程中只有揭示其本质,才能灵活地解决问题,思维发散性才有用武之地.

2. 思维的广阔性

思维的广阔性集中表现在全面考虑问题上. 解题时,学生要认真地审题,抓住问题的方方面面,继而合理调动和选择与之相关的知识解决问题.

例4 已知抛物线在y轴上的截距为3,对称轴为直线$x=-1$,在x轴上截得的线段长为4,求抛物线的方程.

解决该问题时,可以根据条件"截距为3",列一般方程$y=ax^2+bx+c$,再结合其他条件可解a,b的值,从而得到抛物线的方程;也可以根据条件"对称轴为直线$x=-1$",列顶点式方程,即$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$,再结合其他条件求出a,k的值;还可以根据条件"x轴上截得的线段长为4",列两根式方程求解.

解题时,要处理好整体与局部的关系,利用发散性思维调动相关知识、技能,探寻多种解决问题的方案,以此提升思维品质.

3. 思维的敏捷性

思维的敏捷性集中表现在解决问题的速度和正确率上,具有这一品质的学生往往能够缩短运算和推理的过程,高效地解决问题.

例5 相邻边长为a和b的平行四边形$ABCD$,绕a边旋转一周所得几何体的体积为V_a,绕b边旋转一周所得几何体的体积为V_b,则$V_a:V_b=$(　　)

A. $a:b$　B. $b:a$　C. $a^2:b^2$　D. $b^2:a^2$

若直接从一般平行四边形的角度出发,求相应几何体的体积需要引入一个变量,即设相邻两边的夹角为θ,于是有$V_a=\pi ab^2\sin^2\theta$,$V_b=\pi a^2b\sin^2\theta$,$V_a:V_b=b:a$. 但由于本题是一个选择题,解题时不妨从其特殊性出发,将平行四边形看成矩形来处理,这样可以简化运算过程,提高解题效率.

4. 思维的独创性

思维的发散性为思维的独创性的发展提供了养料. 在日常教学中,教师要鼓励学生打破传统和习惯,善于从问题的不同方面提出解决问题的方法和意见,巧妙地解决问题,以此发展思维的独创性,提高思维的灵活性和变通性.

例6 求$\sin^2 10°+\sin^2 50°+\sin10°\sin50°$的值.

解法1:$\sin^2 10°+\sin^2 50°+\sin10°\sin50°=1-\frac{1}{2}(\cos20°+\cos100°)+\sin10°\sin50°=1-\cos60°\cos40°+\frac{1}{2}(-\cos60°+\cos40°)=\frac{3}{4}$.

解法2:构造对称式,令$x=\sin^2 10°+\sin^2 50°+\sin10°\sin50°$,$y=\cos^2 10°+\cos^2 50°+\cos10°\cos50°$,则$x+y=2+\cos40°$,$x-y=-\cos40°-\frac{1}{2}$,两式相加得$2x=\frac{3}{2}$,即原式$=\frac{3}{4}$.

解法1为常规解法,解法2通过构造对称式灵活地解决了问题,方法独特,简捷有效. 在解题教学中,教师要鼓励和启发学生多角度、多渠道进行联想,这样不仅可以得到巧妙的、独特的解法,而且可以加深学生对知识的理解,有利于学生思维发散性的培养,提高其学习能力.

总之,教学中教师要多为学生提供一些机会去思考、去发现、去探索,通过"多解""多变"等多种渠道培养学生思维的发散性,提升学生思维的品质.