



【课堂聚焦·教材教法】

高中数学新教材“同一个函数”的教学重构研究

廖运章，张铭慧

(广州大学 数学与信息科学学院，广东广州 510006)

【摘要】《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》明确提出同一个函数的定义，引领着高中数学教材编写、课堂教学与测量评价。在解读高中数学新课标、新教材的基础上，笔者重构应然的“同一个函数”的教学设计，建议高中数学教科书删除用“对应关系”判断同一个函数的方法，采用新课标的处理思想与具体操作的定义，并与《数学分析》等高等数学教科书保持一致。

【关键词】高中数学；同一个函数；教学重构

《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》（以下简称“新课标”）“附录2 教学与评价案例”之“案例2 函数的概念”（以下简称“案例2”）明确指出，如果两个函数的定义域相同，且相同的变量值对应的函数值也相同，那么，这两个函数就是同一个函数。新课标为何专门对此做出规定？这些规定对数学教材编写、课堂教学、测量评价有何引领价值，笔者将对此进行深入研究。

一、“同一个函数”的课标与教材分析

以往的高中数学考试大纲和课标关于“同一个函数”的概念是没有规定的，但2004年人教A版和2004年湘教版高中数学教材则分别给出“两个函数相等”的定义，依次是“如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称这两个函数相等”“如果两个函数 f, g 的定义域是同一个数集 A ，并且对任意的 $x \in A$ 都有 $f(x) = g(x)$ ，就说这两个函数相等，记作 $f = g$ ”。此外，2004年沪教版高中数学教材虽未对“同一个函数”下定义，但练习3.1第5题要求判断“下面四组函数中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一个函数的是……”。

囿于教材的不同处理，导致教学实践出现如何判断两个函数是否是同一个函数的诸多困惑。比如，对比函数 $y = x, x \in \{-1, 0, 1\}$ 与 $y = x^{2019}, x \in \{-1, 0, 1\}$ 是否是同一个函数。从2004年人教A版来看， $y = x^{2019}$ 不能再化简，显然与 $y = x$ 不同，即“对应关系不完全一致”，这两个函数不相等；但按

照2004年湘教版的定义，如果相同的变量值对应的函数值相同，那么这两个函数相等。孰是孰非，莫衷一是，容易让人产生歧义。

其实，由于教材中“对应关系”是不加定义的，如何判断“对应关系完全一致”难以统一，这是造成教学混乱的外在因素，其本质是没有理解函数概念，反映出函数概念“集合对应说”本身的缺陷——没有明确什么是对应。这正是1859年数学家李善兰等翻译的《代微积拾级》首次引入函数名称至今，学生难以把握函数定义本质的根本原因。

（一）新课标的“同一个函数”

新课标史无前例地对函数定义做出规定，即“给定两个非空实数集合 A 和 B ，以及对应关系 f ，若对于集合 A 中的每一个实数 x ，集合 B 中有唯一实数 $y = f(x)$ 与 x 对应，则称 $y = f(x)$ 为集合 A 上的函数”。对应关系强调的是对应的结果，而不是对应的过程。例如，借助高中函数的表达式，可以认定函数 $y = \cos^2 x + \sin^2 x, x \in (-\infty, +\infty)$ 与函数 $y = 1, x \in (-\infty, +\infty)$ 表示同一个函数。”“函数 $y = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$ 与函数 $y = x^2, x \in (0, +\infty)$ 的对应关系相同，但它们是不同的函数，因为它们的定义域不同。

不难发现，新课标采用分离式看待函数，即函数就是一个对应系统，实数集 A 、实数集 B 、对应关系 f 是函数 $f: A \rightarrow B$ 的构成要素，三者相对独立，当 A 中的任意一个实数 x ，在 B 中都有唯一确定的实数 $y = f(x)$ 和 x 对应时，这个对应系统就是从实

【作者简介】廖运章，广州大学数学与信息科学学院教授，博士生导师，主要从事数学课程与教学论研究；张铭慧，广州大学数学与信息科学学院在读硕士研究生。



数集 A 到实数集 B 的一个函数, 记作 $y=f(x)$ ($x \in A, y \in B$)。

简单来说, 对实数集 A 中的任何一个实数 x , 实数集 B 中都有唯一确定的实数 $y=f(x)$ 与 x 对应, $y=f(x)$ 就是集合 A 上的函数。其中, 对应关系 f 是形式上的, 是不带实数集 A 、实数集 B 的, 即 $x \rightarrow f(x)$ 表示给定实数 x 就有唯一对应的 $f(x)$, 而不管 x 是否属于实数集 A , $f(x)$ 是否属于实数集 B 。对应关系相同指的就是形式上相同, 如上面提及的函数 $y=x^2, x \in (-\infty, +\infty)$ 与函数 $y=x^2, x \in (0, +\infty)$ 。

对于同一个函数, 新课标指出, 更一般地, 可以判断两个函数是否相同: 如果两个函数的定义域相同, 且相同的变量值对应的函数值也相同, 那么, 这两个函数就是同一个函数。直观地说, 如果两个函数的图象重合, 这两个函数是同一个函数。可以看出, 在两个函数的定义域相同的情况下, 新课标采用“相同的变量值对应相同的函数值”作为判断两个函数是否是同一个函数的主要依据, 这与《数学分析》等高等数学教科书的要求一致。

(二) 新教材的“同一个函数”

随着新课标关于判断两个函数是否是同一个函数依据的颁行, 各新版高中数学教材也做了相应的调整 (见表1)。可是, 2019年人教A版、2019年北师大版、2019年苏教版等三套数学新教材仍主要采用“对应关系是否相同”来处理, 并未采纳新课标的建议。

表1 高中数学新教材“同一个函数”的具体定义

教材版本	“同一个函数”的定义
2019年 人教A版	如果两个函数的定义域相同, 并且对应关系完全一致, 即相同的自变量对应的函数值也相同, 那么这两个函数是同一个函数 ^[1]
2019年 北师大版	函数概念强调了数与数之间的对应关系, 并且对应关系指的是对应的结果, 而不是对应的过程。比如, $y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & y < 0 \end{cases}$ 与 $y = \frac{x}{ x }$ 是同一个函数 ^[2]
2019年 苏教版	虽然两个函数的表达形式不同, 但如果其对应关系相同, 定义域相同, 那么这两个函数就是同一个函数。例如函数 $y=x^2 [x \in (0, +\infty)]$ 与函数 $s=t^2 [t \in (0, +\infty)]$ 是同一个函数。如果两个函数的表达式相同, 即其对应关系相同, 但定义域不同, 那么这两个函数就是不同的函数 ^[3]

2019年人教A版高中数学新教材关于“同一个函数”的定义由2004年人教A版数学教材的函数相等变化而来, 即由“如果两个函数的定义域和对应关系完全一致, 我们就称这两个函数相等”, 变为“如果两个函数的定义域相同, 并且对应关系完全一致, 即相同的自变量对应的函数值也相同, 那么这两个函数是同一个函数”。尽管增加了“即相同的自变量对应的函数值也相同”的内容, 但教材例3的解答并未做相应调整, 依然沿用对应关系判断法进行判断, 如将例3第(3)问变形为 $y = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$ 与 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 进行比较, 当 $x < 0$ 时, $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 对应关系不相同, 所以两个函数不是同一个函数。

2019年北师大版教材特别强调“对应关系指的是对应的结果, 而不是对应的过程”, 但在第52页例1第(2)问判断 $f(x)=x^2, g(x)=(x+1)^2$ 是否是同一个函数, 因为两个函数的对应关系不同, 所以不是同一个函数。此判断理由并不能体现这是“对应结果”的不同, 恰恰体现教材将对应关系理解解析式, 反而因为“过程(解析式)”不同而判断其不是同一个函数。此外, 其余3道习题也体现了2019年北师大版教材分离式看待函数三要素, 并要求定义域和解析式都相同才能判断两个函数是同一个函数。

2019年苏教版涉及“函数相同”的相关内容不多, 只简单下定义, 而未给出范例。该教材表示“表达式相同, 即对应关系相同”, 但“表达形式不同, 对应关系也可相同”, 所以2019年苏教版认为对应关系除了解析式还有别的表现形式, 但是并未进一步展开。因此, 2019年苏教版只能确定同时比较定义域和对应关系时, 如果定义域不相同, 那么函数不相同; 而表达形式不同, 但对应关系相同的例子只局限于相同的解析式用不同的字母表示。

(三) “同一个函数”的判断

由于教材未定义对应关系, 如何理解对应关系相同, 每个人的看法都不一致, 容易产生歧义。况且, 在定义域相同的前提下, “对应关系完全一致”与“相同的自变量对应的函数值相同”并不等价。“对应关系完全一致”的外延小于“相同的自变量对应的函数值相同”的外延, 违反给概念下定义的基本要求——定义应当相称。

因此, 笔者建议教师在“同一个函数”的课堂教学中采用“如果两个函数的定义域相同, 且相同

的变量值对应的函数值也相同，那么，这两个函数就是同一个函数”。这正是新课标的处理思想与具体操作的定义。

下面基于2019年人教A版高中数学必修第一册，以“两个函数是同一个函数”例3的教学为例，设计应然的教学方案，具体教学过程如下。

二、应然的“同一个函数”教学设计

(一) 教学目标

新课标要求学生建立完整的函数概念，判断两个函数是否是同一个函数也是学习函数概念的一个重要方面。结合函数本质理解并掌握同一个函数定义，学会用定义法和图象法判断两个函数是否是同一个函数。

(二) 教学过程

1. 概念回顾

问题1：我们学习了函数的概念，大家还能想起函数定义吗？请用图示简单表示函数定义。

函数是一种特殊的对应关系 $f: A \rightarrow B$ ，通常表示为 $y=f(x)$ ， $x \in A$ ，函数值是 $f(x)$ ，“对应”是函数的本质，如图1所示。

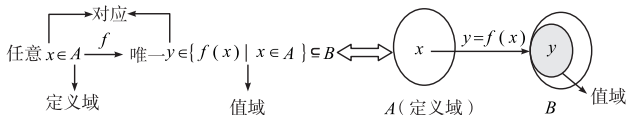


图1

形象地说，函数就是一个对应系统，由实数集A、实数集B、对应关系f构成，当A中的任意一个实数x，在B中都有唯一确定的实数 $y=f(x)$ 和x对应时，这个对应系统就是从实数集A到实数集B的一个函数，记作 $y=f(x) (x \in A, y \in B)$ 。

【设计意图】只有把握函数定义本质，才能正确判断两个函数是否是同一个函数。通过回顾已学的函数概念，为学生学习“同一个函数”概念做铺垫，用图表表示函数定义，促进学生理解函数的概念，掌握函数“对应”的本质。

2. 导入“同一个函数”概念

由函数定义可知，“对应”是函数的本质。如果两个函数的定义域相同，相同的变量值对应的函数值也相同，那么，这两个函数具有特殊的关系，我们称这两个函数是同一个函数。

教师板书“同一个函数”的定义：如果两个函数的定义域相同，相同的变量值对应的函数值也相同，则称两个函数是同一个函数。

换言之，只要两个函数的“对应系统”一样，即“A中的任意一个实数x，在B中都有唯一确定的实数 $y=f(x)$ 和x对应”相同，则这两个函数是同一个函数。

从图象上看，如果两个函数的定义域相同，对同一个自变量x的值，相应的函数值y相同，则由点集 $\{(x, y) | y=f(x), x \in A, y \in B\}$ ， $\{(x, y) | y=g(x), x \in A, y \in B\}$ 构成的图象重合。因此，如果两个函数的图象重合，则这两个函数是同一个函数。

【设计意图】由函数定义直接引出“同一个函数”概念，让学生理解判断两个函数是否为同一个函数要从函数的三要素出发，要紧紧围绕函数的本质——对应。同时，也可借助图象表示函数，视觉化呈现两个函数，有效帮助学生理解“相同的变量值对应的函数值也相同”。

3. 理解概念

问题2：刚刚我们学习了同一个函数的定义。由定义可知，定义域以及“相同的变量值对应的函数值也相同”的对应结果是判断两个函数是否是同一个函数的关键；此外，对比两个函数的图象也可以判断两个函数是否是同一个函数。同学们能否用这两种方法解以下例题？

例1 下列函数中哪个函数与函数 $y=x$ 是同一个函数？

- (1) 函数 $y=\sqrt{x^2}$ ；(2) 函数 $u=\sqrt[3]{v^3}$ 。

问题3：函数 $y=\sqrt{x^2}$ ($u=\sqrt[3]{v^3}$) 与函数 $y=x$ 的定义域分别是什么？它们的定义域相同吗？

问题4： $y=\sqrt{x^2}$ ($u=\sqrt[3]{v^3}$) 在实数集R内取何函数值？ $y=x$ 呢？这两个函数在实数集R内对应的函数值相同吗？

问题5：由函数定义可知，因为这两个函数相同的变量值对应的函数值不同（相同），所以这两个函数不是（是）同一个函数。同学们能否通过函数图象来验证这一结论？

【设计意图】新课标采用分离式看待函数，函数的定义域、对应关系、值域三要素相对独立，判断两个函数是否是同一个函数也需同时判断定义域和“相同的变量值对应的函数值是否相同”。定义法的运用紧紧围绕着函数的本质与同一个函数的定义。此外，学生也可以对比两个函数的图象，直观而快速地验证“相同的变量值对应的函数值是否相同”，从而判断两个函数是否为同一个函数。

问题6：同学们能从以上例题总结出判断两个函数是否是同一个函数的基本步骤吗？



在解题的过程中,教师总结解题步骤,让学生经历从特殊到一般的思维过程,帮助学生形成一定的逻辑思维能力,让学生在解题时有清晰的解题思路。

4. 巩固概念(变式教学)

根据新课标与新教材的同一个函数定义的指引,例1的解答渗透了“相同的变量值对应的函数值也相同”的解题思想。教师通过以上例题,引导学生初步理解“同一个函数”的概念及其判断步骤后,再通过设置练习题的方式进一步引导学生巩固和内化相关知识。

学生活动:教师请两名学生到讲台上分别板演。学生完成后,师生共同评价并完善。

例2 下列函数中哪个与函数 $y=x$ 是同一个函数?

- (1) 函数 $y=(\sqrt{x})^2$; (2) 函数 $m=\frac{n^2}{n}$ 。

例3 函数 $y=x, x \in \{-1, 0, 1\}$ 与 $y=x^{2019}, x \in \{-1, 0, 1\}$ 是否相等?请说明理由。

例2与例3各有特色,教师帮助学生鉴别习题特点,灵活地应用定义进行解题,使学生在理解中应用概念,在应用中深化理解同一个函数的定义。

5. 系统化概念

(1) 课堂小结视觉化,促进知识系统化

问题7:本节课我们学习了同一个函数的定义、判断同一个函数的两种基本方法,以及判断同一个函数的基本步骤,同学们能否用自己的语言进行描述?或者用一种直观的方法来总结今天所学的知识。

教师引导学生进行总结后,用课件出示以下内容。

①同一个函数的定义:如果两个函数的定义域相同,相同的变量值对应的函数值也相同,则称两个函数是同一个函数。

②判断两个函数是否是同一个函数的基本方法:定义法(函数值法)、图象法。

③判断两个函数是否是同一个函数的基本步骤:定义域是否相同 $\Rightarrow$ 相同的变量值对应的函数值是否相同,如图2。

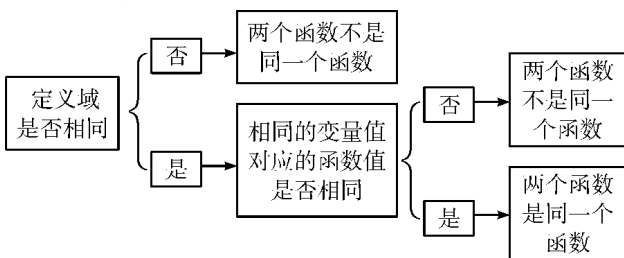


图2

【设计意图】函数本身具有抽象性,要通过把函数知识分解为一个一个学生可以接受的局部知识进行教学,“同一个函数”也是其中的重要组成部分。理解和应用同一个函数的定义也是深化理解整个函数知识系统的过程。用图示的方式直观简明地视觉化呈现同一个函数的定义及其内在联系,能使学生愉悦地获取知识,也有助于其在后续学习过程中将此局部知识重新融入整个函数知识系统之中。

(2) 布置课后作业,巩固和发展知识系统

1. 下列各对函数是否是同一个函数?并说明理由。

(1) 函数 $f(n)=2n+1, n \in \mathbf{Z}$, 函数 $g(n)=2n-1, n \in \mathbf{Z}$;

(2) 函数 $f(x)=2x, x \in \{2, 4\}$, 函数 $g(x)=x^2, x \in \{2, 4\}$;

(3) 函数 $f(x)=\sqrt{(x-2)^2}, x \geq 2022$; 函数 $g(x)=x-2, x \geq 2022$ 。

2. 课本P67练习第3题。

3. 课本P72习题3.1第2题。

以上课后作业旨在培养学生在不同情境中判断同一个函数的能力,引导学生将已有的知识系统运用到新的问题之中,激发学生不断探索和求知,完善和发展自身知识结构,保持知识系统先进性。

三、讨论与建议

通过比较分析发现,除2004年人教A版数学教材和2004年湘教版数学教材用“函数相等”外,新课标及其配套新教材都采用“同一个函数”的术语。是否要区别“同一个函数”与“函数相等”两个概念?苏柏山教授认为,表现形式有所不同,甚至进行简单的变形后的函数都不能认为是“同一函数”,而只能认为是“相等的函数”,建议采用“相等的函数”^[4]。

华东师范大学版《数学分析》采用“两个函数相同”,约定某两个函数相同,是指它们有相同的定义域和对应法则;如果两个函数对应法则相同而定义域不同,那么这两个函数仍是不相同的;两个相同的函数,其对应法则的表达形式可能不同^[5]。高等教育出版社《数学分析》采用“函数相等”：“对于两个函数 f 和 g 当且仅当它们有相同的定义域 X ,且对 X 内的每一个实数 x ,它们有相同的函数值,我们才称这两个函数相等,记为 $f=g$ 。显然它们的值域也必相同。”^[6]此外,北京师范大学出版社《数学分析》采用“函数相等”。北京

(下转第28页)



境,使综合算式的模型印入学生的脑海中,便于学生自主创建更多的综合算式模型以解决实际问题。因此,教师在教学中除了可以采用依据问题列综合算式解决实际问题这样的常态化教学方式,还可以采用“联系情境说说这个算式表示的意思”“结合算式创编实际问题”这样的逆向提问教学设计。根据实际情境列综合算式,是生活化向数学化的转变,而根据综合算式想象实际情境,则是数学化向生活化的转变。生活与数学的双向互通,能够有效实现直观与抽象的相互交融,帮助学生建构综合算式模型,最终促成学生问题解决能力的提升。

(三) 构建题组模块, 对比分析实现深度理解

比较是学生学习数学的重要方式,通过比较,学生对数学知识的认知才能走向更深层次。在题型结构、数量关系、解题方法、数学思想上构建基于同一个数学模型的题组模块,引导学生进行对比分析,能够帮助学生对知识的深度理解与掌握。如前文所述,苏教版教材中提供了意图明确的三类题组练习,教师可以充分运用这三类题组练习,挖掘练习背后的设计意图,让隐性的数学规律结构化、可视化、算法化。同时,教师应进一步挖掘题组素材,引导学生基于现有题组续编练习,进而构建题

组模块。学生自主构建题组模块的过程,既是内化知识的过程,也是运用知识的过程,最终实现对知识的深度理解。此外,题组模块的对象不仅仅局限于简单的混合运算算式中,还可以是多道混合运算实际问题。教师可以构建题型结构、数量关系相近的实际问题题组模块,让学生在解决问题后进一步尝试续编题组,在不断完善的题组模块中发现一般性规律,强化对解决问题过程的理解,培养和发展初步的数学建模意识与能力。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准 (2011年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012.
- [2] 南京东方数学教育科学研究所. 义务教育教科书 数学教师教学用书 三年级下册 [M]. 南京: 江苏凤凰教育出版社, 2014.
- [3] 史宁中. 基本概念与运算法则: 小学数学教学中的核心问题 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [4] 陈永明. 在简约中寻求厚重 [J]. 小学数学教师, 2019 (1): 47-49.
- [5] 郑毓信. 数学教育改革十五谈 [J]. 数学教育学报, 2014 (3): 1-7.

(责任编辑: 罗小荧)

(上接第24页)

大学出版社《数学分析》不区分“函数相等”和“同一个函数”, 两个词都使用^[7]。一般地, 国内相关大学数学教材都没有区分“函数相等”或“同一个函数”。

国外引进的相关数学分析教材也没有明确区分这两个术语。俄罗斯数学教材选译《数学分析(第一卷)(第4版)》采用“函数相等”: “如果两个函数 f_1, f_2 有相同的定义域 X , 且对每个 $x \in X$, 这两个函数的函数值 $f_1(x), f_2(x)$ 一致, 就认为两个函数 f_1 与 f_2 一致或相等, 这时记作 $f_1 = f_2$ ”^[8]。机械工业出版社《数学分析》采用“函数相等”^[9]。而美国托马士等所著的《托马士微积分》则采用“同一函数”^[10]。

不难看出, 无论是国内还是国外大学数学教材, 都没有特别区分“同一个函数”和“函数相等”, 可不区分使用, 但新课标已采用“同一个函数”的说法, 为不产生歧义, 建议高中数学统一采用“同一个函数”的术语。

参考文献:

- [1] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 数学(A版) 必修 第一册 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [2] 王尚志, 保继光. 普通高中教科书数学必修第一册 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2019.
- [3] 单墀, 李善良. 普通高中教科书数学必修第一册 [M]. 南京: 江苏凤凰教育出版社, 2019.
- [4] 苏柏山. 应区别“同一个函数”与“相等的函数”两个概念 [J]. 河北机电学院学报, 1993 (4): 82-86.
- [5] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册) [M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [6] 复旦大学数学系. 数学分析(上册) [M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [7] 伍胜健. 数学分析: 第一册 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2009.
- [8] 卓里奇 B A. 数学分析: 第一卷 [M]. 4版. 蒋铎, 王昆扬, 周美柯, 等译. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [9] APOSTOL T M. 数学分析(原书第2版) [M]. 邢富冲, 邢辰, 李松洁, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [10] 托马士, 芬尼. 托马士微积分(上册) [M]. 骆传忠, 骆传孝, 译. 北京: 晓园出版社, 1993.

(责任编辑: 陆顺演)