要效果也要效率*

——一道高考压轴题的方法探究与高考第 2 轮复习启示

●钱大林　（严州中学新校区　浙江建德　311600）
●沈　良　（萧山区第五高级中学　浙江杭州　311202）

摘　要：如何站在整体、系统的高度有效进行二轮复习是一个重要的课题. 文章通过一道高考压轴题的方法探究，从“一题多解，规划‘解’的重点”“一题多变，定位‘变’的重心”“多题一解，把握‘一’的核心”这 3 个方面研究如何开展专题复习，让二轮复习既有效果又有效率.

关键词：方法探究；复习启示；效果效率
中图分类号：O122　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1003－6407(2017)03-23-05

教学是有目标的行为，每一节课都必须为实现目标而努力[1]. 有效果的教学，即课堂能达成培育学生核心素养的教学目标. 有效率的教学，即教师能遵循教学活动的客观规律，顺应学情，减少非本质的影响，以尽可能少的时间投入，达成我们所预设的教学目标. 高三的第 1 轮复习通过问题复习方法，第 2 轮以专题提升能力，该阶段更要站在整体、系统的高度，不断优化思维过程，培养学生见到问题选择方法的批判思维，总体提高学生运用知识与方法的综合能力. 笔者通过对 2015 年浙江省数学高考文科试题第 20 题第 2) 小题的方法探究，就如何让高三数学二轮复习既富有效果又富有效率，谈谈自己的想法，恳请同行批评指正.

题目　设函数 $f(x)=x^2+ax+b$(其中 $a,b\in\mathbf{R}$).

1) 当 $b=\dfrac{a^2}{4}+1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值 $g(a)$ 的表达式；

2) 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在零点，且 $0\leqslant b-2a\leqslant 1$，求 b 的取值范围.

(2015 年浙江省数学高考文科试题第 20 题)

关于这个神奇的四点共圆，肯定还有许多性质，有待数学爱好者继续研究(可参考文献[2]和文献[3]). 下面笔者再给出 2 个结论，限于篇幅，其证明不再赘述，留给读者完成.

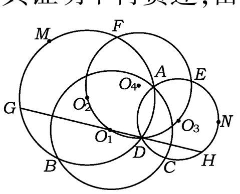

图 11

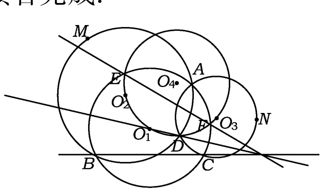

图 12

结论 3　如图 11，已知 A 是 $\odot O_1$ 上一点，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 都经过点 A，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 与 $\odot O_1$ 的另一交点分别为 B，C，$\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 的另一交点为 D. 设 $\overset{\frown}{AMB}$，$\overset{\frown}{ANC}$，$\overset{\frown}{BAC}$ 的度数都相等，$\odot O_4$ 经过点 O_2，O_1，D，O_3，与 $\odot O_2$，$\odot O_3$ 分别交于点 F，E，直线 O_1D 与 $\odot O_2$，$\odot O_3$ 的另一交点分别为 G，H，则

1) O_1 是 GH 的中点；

2) 点 E，F，G，H 共圆.

结论 4　如图 12，已知 A 是 $\odot O_1$ 上一点，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 都经过点 A，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 与 $\odot O_1$ 的另一交点分别为 B，C，$\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 的另一交点为 D. 设 $\overset{\frown}{AMB}$，$\overset{\frown}{ANC}$，$\overset{\frown}{BAC}$ 的度数都相等，$\odot O_4$ 经过点 O_2，O_1，D，O_3，且与 $\odot O_1$ 交于点 E，F，则 3 条直线 EF，O_1D，BC 共点.

参考文献

[1]　黄新民.“等弧度三圆共点图”的几个有趣性质[J]. 中学教研(数学)，2016(8)：27-29.
[2]　黄新民，刘臻. 一道数学中考题的变式与探究[J]. 中学教研(数学)，2015(10)：46-47.
[3]　黄新民. 简谈整点多边形的存在性问题[J]. 中学教研(数学)，2012(3)：4-5.

* 收文日期：2016-10-10；修订日期：2016-11-16
作者简介：钱大林(1970－)，男，浙江建德人，中学高级教师. 研究方向：数学教育.

1　命题意图探究

从问题叙述上看,该题延续了浙江省高考命题以往的风格——题干通俗易懂、简洁明了. 试题的题型和背景熟悉而常见,有着“起点低、入口宽、多层次、区分好”的特色. 第 1)小题与第 2)小题采用并列的形式设计,2 者独立不关联. 第 1)小题是学生非常熟悉的二次函数在闭区间上的最值问题求解,属于基础考查;第 2)小题是一道情境熟悉、角度变换、稳定考查基础、推陈出新的考题,它给学生一种熟悉又不知道从何处下手的感觉,较好地考查了学生在解决二次函数零点问题上知识与方法的综合运用能力,难度较大.

2　第 2)小题解法探究

思路 1　运用线性规划方法解决

这是比较大众化的想法,是把二次函数零点的分布转化为对称轴、端点函数值、判别式等等价条件. 依题知

$$\begin{cases} f(-1)f(1)\leqslant 0, \\ 0\leqslant b-2a\leqslant 1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} -1\leqslant -\dfrac{a}{2}\leqslant 1, \\ \Delta=a^2-4b\geqslant 0, \\ f(-1)\geqslant 0, \\ f(1)\geqslant 0, \\ 0\leqslant b-2a\leqslant 1. \end{cases}$$

下面可令 $x=a$,$y=b$ 作出相应可行域,如图 1 ~ 2 所示,研究 y 的取值范围.

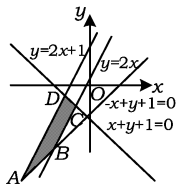

图 1

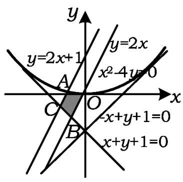

图 2

由图 1 可得 $-3\leqslant y\leqslant -\dfrac{1}{3}$;由图 2 可得 $-\dfrac{2}{3}\leqslant y\leqslant 9-4\sqrt{5}$,从而 b 的取值范围是 $-3\leqslant b\leqslant 9-4\sqrt{5}$.

评注　该思路简单自然,分类及画图较繁琐. 在考场如战场的解题过程中,需要我们拥有扎实的基本功和应变能力[2]. 于是笔者自然设想,思路 1 是否能求简变通呢?

事实上,思路 1 可以略作简化:由于函数有零点,则

$$f(x)=x^2+ax+b=0,$$

从而
$$\Delta=a^2-4b\geqslant 0.$$

考虑到 $0\leqslant b-2a\leqslant 1$,即

$$a^2\geqslant 4b\geqslant 8a,$$

解得
$$a\geqslant 8 \text{ 或 } a\leqslant 0,$$

从而对称轴 $x=-\dfrac{a}{2}\leqslant -4$ 或 $x=-\dfrac{a}{2}\geqslant 0$.

当对称轴 $x=-\dfrac{a}{2}\leqslant -4$ 时,由于 $f(-2)=4+b-2a\in[4,5]$,要使函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在零点是不可能的,故此时 a,b 不存在.

当对称轴 $x=-\dfrac{a}{2}\geqslant 0$ 时,有

$$\begin{cases} a^2-4b\geqslant 0, \\ -\dfrac{a}{2}\geqslant 1, \\ f(-1)f(1)\leqslant 0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a^2-4b\geqslant 0, \\ 0\leqslant -\dfrac{a}{2}\leqslant 1, \\ f(-1)\geqslant 0. \end{cases}$$

显然,此解法充分利用隐含条件,将字母 a 的范围缩小,起到了简化讨论的作用.

思路 2　运用变更主元的方法解决

设 $t\in[-1,1]$,则 $t^2+at+b=0$,令 $a=x$,$b=y$,得直线 $xt+y+t^2=0$(如图 3 所示),从而关于 x,y 的约束条件组是

$$\begin{cases} y=-tx-x^2, \\ 0\leqslant y-2x\leqslant 1. \end{cases}$$

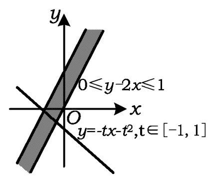

图 3

联立
$$\begin{cases} y=-tx-t^2, \\ y=2x+1, \end{cases}$$

从而
$$y=\frac{t-2t^2}{2+t},\text{其中 } t\in[-1,1],$$

于是
$$y\in[-3,9-4\sqrt{5}].$$

联立
$$\begin{cases} y=-tx-t^2, \\ y=2x, \end{cases}$$

从而
$$y=\frac{-2t^2}{2+t},\text{其中 } t\in[-1,1],$$

于是
$$y\in[-1,0].$$

综上所述,b 的取值范围是 $[-3,9-4\sqrt{5}]$.

评注　该思路的着力点是引入了零点 t 当参数,利用变更主元法,把等式 $t^2+at+b=0$ 看成关于 a,b 为主元的直线方程 $xt+y+t^2=0$(令 $a=x$,$b=y$),解题效率明显提高.

思路 3　转化为函数图像交点解决

若 $F(x)=f(x)-g(x)$,则函数 $F(x)$ 有零点 $\Leftrightarrow$ 方程 $F(x)=0$ 有根 $\Leftrightarrow$ 图像 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有交点. 据此,笔者想到:函数 $f(x)=x^2+ax+b$(其中 $a,b\in\mathbf{R}$)在 $[-1,1]$ 上存在零点 $\Leftrightarrow g(x)=ax+b$ 与 $h(x)=-x^2$ 在 $[-1,1]$ 上有交点(如图 4 所示). 因为 $g(-2)=-2a+b\in[0,$

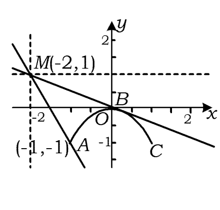

图 4

1],所以当函数$g(x)=ax+b$ 的图像过点 $M(-2,1)$,且过点$A(-1,-1)$时,截距 b 取得最小值 -3;当图像过点 $M(-2,1)$且相切于点 B 时,截距 b 取得最大值$9-4\sqrt{5}$. 通过几何直观可知 b 的取值范围为$[-3,9-4\sqrt{5}]$.

思路 4 运用"以值代参"方法解决

该思路中一个合乎情理的切入点是:如何利用思路 1 中发现的$f(-2)=4+b-2a\in[4,5]$. 于是,设 t,s 是$f(x)$的 2 个零点,且 $t\in[-1,1]$,由$f(x)=(x-t)(x-s)$,得

$$f(-2)=(2+t)(2+s),$$

从而 $$4\leqslant(2+t)(2+s)\leqslant5.$$

因为 $t\in[-1,1]$,所以

$$\frac{-2t}{2+t}\leqslant s\leqslant\frac{1-2t}{2+t}.$$

当$0\leqslant t\leqslant1$ 时,

$$\frac{-2t^2}{t+2}\leqslant b\leqslant\frac{t-2t^2}{t+2},$$

因为$-\frac{2}{3}\leqslant\frac{-2t^2}{t+2}\leqslant0$ 和$-\frac{1}{3}\leqslant\frac{t-2t^2}{t+2}\leqslant9-4\sqrt{5}$,所以

$$-\frac{2}{3}\leqslant b\leqslant9-4\sqrt{5}.$$

当$-1\leqslant t\leqslant0$ 时,

$$\frac{t-2t^2}{t+2}\leqslant b\leqslant\frac{-2t^2}{t+2},$$

因为$-3\leqslant\frac{t-2t^2}{t+2}<0$ 和$-2\leqslant\frac{-2t^2}{t+2}<0$,所以

$$-3\leqslant b<0.$$

综上所述,b 的取值范围是$-3\leqslant b\leqslant9-4\sqrt{5}$.

评注 思路 4 启示我们:联系函数值$f(-2)$与参数 a,b 间的桥梁起到了关键作用. 不妨把上述用函数值代替参数的关键处称为"以值代参",该方法在解题教学中具有一定的推广价值.

3 二轮复习启示

3.1 一题多解,规划"解"的重点

解题方法的多样性、灵活性决定了二轮复习一题多解的常态化."解"的重点放在何处,关系到预设教学目标达成的效果. 查漏补缺、提升综合应用数学思想的能力是该阶段的主要教学任务. 因此,在课堂中是否有必要全部详细分析上述解题思路?显然要有取舍,要突出主次. 如在简要肯定思路 1 的同时,要顺势在思路 1 的基础上留足时间让学生有所改进,凸显优化思维过程,这是"解"的重点之一;至于思路 2 和思路 3,体现了代数问题几何化的观点,教师要启发学生如何发现几何要素、怎么进行几何直观、怎么进行变更主元、怎么进行构造方程与函数等等,这些都是"解"的重点之二;对于思路 4,如何用"以值代参"的想法嫁接 b 的取值范围,便是"解"的重点之三了.

二轮复习需要关注学生对运算实际操作的可行性分析和预判,关注如何优化学生的认知结构,增强数学能力,培育学生的核心素养,这些都是教师规划"解"的重点的决策依据. 规划巩固题"解"的重点放在何处、详略得当,同样关乎我们的教学效果.

巩固题 设函数$f(x)=x^2+ax+b$ 有 2 个零点,其中一个零点在区间$(0,1)$内,另一个零点在区间$(1,2)$内,则$\frac{b-4}{a-1}$的取值范围是______.

思路 1 ("以值代参"法)根据题意,设 2 个相异的零点为 x_1,x_2,且$0<x_1<1<x_2<2$,则

$$1<x_1+x_2=-a<3,\quad 0<x_1x_2=b<2,$$

于是 $$-3<a<-1,\quad 0<b<2,$$

从而 $$\frac{1}{2}<\frac{b-4}{a-1}<2.$$

评注 留足时间让学生发现用 2 个相异的零点嫁接参数 a,b,进一步得到 a,b 的范围.

思路 2 (变更主元法)设 s,t 为方程$f(x)=0$的解,且$0<s<1<t<2$,令 $a=x,b=y$,则

$$\begin{cases}t^2+xt+y=0,\\ s^2+sx+y=0,\end{cases}$$

从而 $$\begin{cases}y=tx-t^2,\\ y=sx-s^2,\end{cases}$$

于是 $$\begin{cases}s=-(s+t),\\ y=st,\end{cases}$$

因此 $$\frac{b-4}{a-1}=\frac{y-4}{x-1}=\frac{4-st}{s+t+1}.$$

因为$0<s<1<t<2$,所以

$$0<st<2,\quad 1<s+t<3,$$

故 $$\frac{1}{2}<\frac{b-4}{a-1}<2.$$

评注 重点启发学生学会变更主元,挖掘几何要素,其他步骤简要点评.

思路 3 (线性规划法)依据题意知

$$\begin{cases}f(0)>0,\\ f(1)<0,\\ f(2)>0,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}b>0,\\ 1+a+b<0,\\ 4+2a+b>0,\end{cases}$$

从而点(a,b)对应的可行域如图5所示. 令 $k=\dfrac{b-4}{a-1}$,则

$$k_{AD}<\frac{b-4}{a-1}<k_{CD},$$

即 $$\frac{1}{2}<\frac{b-4}{a-1}<2.$$

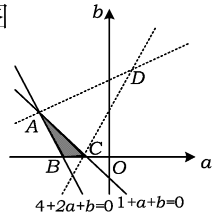

图 5

评注　激励学生尝试写出零点分布的等价条件组,画出可行域及简要呈现范围.

3.2　一题多变,定位“变”的重心

一题多变,能考查学生数学理解的深刻性、分析思维的灵活性及解题技能的熟练性. “变”能有效扩大“战果”. 二轮复习“变”的重心定位在哪里?变条件、变设问、变参数、变方法等等,这些都应在课前有相应的规划,否则容易偏离教学目标,影响二轮专题复习的效果与效率.

在日常教学时笔者发现:当二次函数的零点问题主要考查零点或系数的值、范围时,学生在应用“设而不求与设而求之”的技能上有明显的思维定势. 在解决圆锥曲线问题时,学生能熟练应用这方面技能,但在二次函数零点应用上却缺少主动,数学方法的使用竟然出现了“章节差异”. 这一现象主导着二轮复习课的“变题”,有必要锁定这一重心,努力提升学生应用这项技能的熟练性与灵活性.

变式题 1　已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$(其中 $a,b\in\mathbf{R}$)在$[-1,1]$上存在零点,求 a^2+b^2 的取值范围.

思路 1　(设而不求)设 t 为函数 $f(x)$ 在$[-1,1]$上的零点,则 $t^2+at+b=0$,变形得 $at+b=-t^2$. 由柯西不等式知

$$(-t^2)^2=(at+b)^2\leqslant(a^2+b^2)(t^2+1)^2,$$

于是 $$a^2+b^2\geqslant\frac{t^4}{(1+t^2)^2}.$$

令 $m=t^2$,$t\in[-1,1]$,则当 $m=0$ 时,a^2+b^2 的最小值为 0;当 $m\in(0,1]$ 时,$a^2+b^2\geqslant\dfrac{m^2}{(1+m)^2}>0$,因此 a^2+b^2 的取值范围为$[0,+\infty)$.

思路 2　(设而不求)设 $t\in[-1,1]$,则

$$t^2+at+b=0.$$

令 $a=x,b=y$,即 $xt+y+t^2=0$,而 $d=\sqrt{x^2+y^2}$ 表示原点$(0,0)$到直线 $l:xt+y+t^2=0$ 上动点 $M(x,y)$的距离,则

$$d\geqslant\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}.$$

令 $m=\sqrt{t^2+1}$,其中 $m\in[1,\sqrt{2}]$,从而 $d\geqslant m-\dfrac{1}{m}$.

又令 $g(m)=m-\dfrac{1}{m}$,则 $g(m)$ 在 $m\in[1,\sqrt{2}]$ 上单调递增,于是 $g(m)_{\min}=g(1)=0$.

因此,a^2+b^2 的取值范围为$[0,+\infty)$.

变式题 2　已知 $a\in\left(-1,\dfrac{1}{5}\right)$,函数 $h(x)=(x-1)|x-a|-2x+\dfrac{1}{2}a$ 有且仅有 3 个不同的零点,求 3 个不同零点之和的取值范围.

思路　(设而求之)设函数 3 个不同的零点为 x_1,x_2,x_3,由

$$h(x)=(x-1)|x-a|-2x+\frac{1}{2}a=\begin{cases}x^2-(a+3)x+\dfrac{3}{2}a, & x\geqslant a;\\ -x^2+(a-1)x-\dfrac{1}{2}a, & x<a.\end{cases}$$

因为 $-1<a<\dfrac{1}{5}$,所以

$$\frac{a-1}{2}<a<\frac{a+3}{2},$$

且注意到 $h(a)=-\dfrac{3}{2}a$,于是

1)当 $0<a<\dfrac{1}{5}$ 时,因为

$$\begin{cases}(a-1)^2-4\times\dfrac{1}{2}a>0,\\ h(a)=-\dfrac{3a}{2}<0,\end{cases}$$

所以 $$x_1+x_2+x_3=a-1+\frac{a+3+\sqrt{a^2+9}}{2}=\frac{1}{2}(3a+1+\sqrt{a^2+9})$$

在 $a\in\left(0,\dfrac{1}{5}\right)$ 上单调递增,故

$$x_1+x_2+x_3\in\left(2,\frac{8+\sqrt{226}}{10}\right).$$

2)当 $-1<a\leqslant0$ 时,因为

$$\begin{cases}(a+3)^2-4\times\dfrac{3}{2}a>0,\\ h(a)=-\dfrac{3a}{2}\geqslant0,\end{cases}$$

所以 $$x_1+x_2+x_3=a+3+\frac{a-1-\sqrt{a^2-4a+1}}{2}=\frac{1}{2}\left[3a+5-\sqrt{(a-2)^2-3}\right]$$

在 $a\in(-1,0]$ 上单调递增,故

$$x_1+x_2+x_3\in\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2},2\right].$$

综上所述,$x_1+x_2+x_3\in\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2},\frac{8+\sqrt{226}}{10}\right)$.

前苏联数学家奥加涅相说过:“必须重视,很多例题、习题潜在着进一步扩展其数学功能、发展功能和教育功能的可行性.”[3] 很多数学问题本身看似平淡无奇,但若能挖掘其内涵、适当变化,常常会有意想不到的收获.相信学生经历了上述变式训练之后,在明算理、优方法上一定会上一个新的台阶.

3.3 多题一解,把握“一”的核心

罗增儒先生曾倡导:“通过有限的典型例题的学习去领悟那种解无限道题的数学机智.”[3] 也就是说,教师在解题教学中不能仅仅停留在对解题的分析和评价上,还要善于把解决问题的思想方法进一步推广、延伸到其他问题的解答上,让学生掌握貌似不同问题的统一解题方法与技能,形成举一反三的能力.

二轮复习需要教师在解题后进行提炼和升华,要做到多题一解,就要把握提炼“一”的核心是什么.当复习真正做到多题一解时,学生面对的“题海”也就缩成了“题盆”.“题盆”的形成,也便是二轮复习的理想状态.上述解决问题的思想都可以归结为核心——几何思想或代数思想.下面通过一个拓展题,再予以说明.

拓展题 已知 $f(x)=-2ax^2+bx-ab+b$,其中 $a\in[-1,2]$,$b\in\mathbf{R}$,若 $0\leqslant f(a)\leqslant 1$,求 $3a^2+\frac{4}{3}b^2+4ab-\left|a+\frac{2}{3}b\right|$ 的取值范围.

思路 1 (几何思想)由 $0\leqslant f(a)\leqslant 1$ 得

$$0\leqslant b-2a^2\leqslant 1,$$

令直线 $l:3x+2y=0$,则满足点集 $\{(a,b)\mid 0\leqslant b-2a^2\leqslant 1\}$ 中的动点 (a,b) 到定直线 l 的距离为

$$d=\frac{|3a+2a|}{\sqrt{13}}.$$

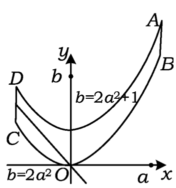

图 6

封闭平面区域(如图 6)中到直线 l 的最远点为 $A(2,9)$,最近点为 $O(0,0)$,从而 $0\leqslant d\leqslant\frac{24}{\sqrt{13}}$,于是

$$0\leqslant\frac{|3a+2a|}{\sqrt{13}}\leqslant\frac{24}{\sqrt{13}},$$

因此 $|3a+2a|\in[0,24]$.

又因为 $3a^2+\frac{4}{3}b^2+4ab-\left|a+\frac{2}{3}b\right|=$

$$\frac{1}{3}[(9a^2+12ab+4b^2)-|3a+2b|]=$$

$$\frac{1}{3}[(3a+2b)^2-|3a+2b|],$$

令 $t=|3a+2b|$,则 $t\in[0,24]$,所以

$$3a^2+\frac{4}{3}b^2+4ab-\left|a+\frac{2}{3}b\right|=$$

$$\frac{1}{3}(t^2-t)=\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{12},$$

该式的取值范围是 $\left[-\frac{1}{12},184\right]$.

思路 2 (代数思想)由 $0\leqslant f(a)\leqslant 1$ 得 $0\leqslant b-2a^2\leqslant 1$,从而

$$4a^2+3a\leqslant 3a+2b\leqslant 4a^2+3a+2.$$

令 $g(a)=4a^2+3a$,其中 $a\in[-1,2]$,从而

$$g(a)\in\left[-\frac{9}{16},22\right];$$

令 $h(a)=4a^2+3a+2$,其中 $a\in[-1,2]$,从而

$$h(a)\in\left[\frac{23}{16},24\right].$$

综上所述,$3a+2b\in\left[-\frac{9}{16},24\right]$,即 $|3a+2b|\in[0,24]$,下同思路 1.

4 结束语

作为一名高三数学教师,应当经常提醒自己:并不是所有的数学知识与方法在二轮复习阶段都可以全面铺开,一定要依据学情,学会取舍与选择,关键在于“明算理、优方法、提品质”.要经常想一想:我们是否真正做到了一名“眼睛里既有数学又有学生,对教育有足够理解”的教师.二轮复习时间短、要求高,只要精致规划,从“一题多解,规划‘解’的重点”“一题多变,定位‘变’的重心”“多题一解,把握‘一’的核心”,一定能让数学学科核心素养的培育落实到课堂复习的各个环节,让二轮复习既富有效果也富有效率.

参 考 文 献

[1] 裴光亚.教学的第一推动力[J].中学数学教学参考,2016(3):1.

[2] 毛良忠.一道高考压轴题的解题赏析及教学思考[J].中学数学教学参考,2016(4):33-35.

[3] 柏长胜.一道课本例题结论的推广及其应用[J].中学数学教学参考,2016(5):38-39.