高三二轮复习关注“五个梯度”

——记一节高三数学二轮复习课对二轮复习的思考

◉江苏省海州高级中学 陶 飞

高三二轮复习不再是简单的做题讲题，二轮复习课要体现教师的水平，要上出有“深度”的课.本节课从高三二轮课堂教学要贯彻基础性、综合性、发展性、探究性和创造性等五个梯度对课堂教学进行引领.

一、设计意图

1.通过对课前基础知识的设置体现二轮复习的基础性，让学生通过基础知识练习掌握圆中基本概念、基本方法以及高考考查形式.

2.通过基础知识4的逐步变化延展体现了二轮复习的发展性和探究性，由一个简单的小题开始，逐步变换条件增加题目的复杂性与综合性，让学生在发展变化的过程中探究解决问题的方法，培养学生通过现象去寻找问题本质的能力，而不是通过“类型+方法”这种机械记忆的方法去解题.

3.例1的一系列变化体现了二轮复习的综合与探究性，通过三种方法的解决让学生充分体会到数学解题的两个转化方向——“数”与“形”，并通过连接高考与变式训练的研究让学生探究到三个问题“形”的本质就是圆.

4.例2的设置体现了二轮复习的创造性，前面问题的研究都是点在圆外，通过研究圆心到直线的距离得到的结论是：距离存在最小值，无最大值；角度存在最大值，无最小值.到了例2中变成了点在圆内，整个性质正好相反，让学生体会条件略微变换可能产生截然不同的结果，创造出一个新的结果出来.

二、教学过程

前面几个基础题较为简单，对过答案后学生课下通过小组自主学习解决存在的问题.

基础知识4：过直线$x+y-2=0$上点P作圆$O:x^2+y^2=1$的两条切线，切点分别为A，B，若$\angle APB=60°$，则点P的坐标为________.

[生1]课前在黑板上板演基础题4的解题过程：

解：连接OA，OP，易知三角形OPA为直角三角形，设点$P(x,2-x)$，由$\angle APO=30°$，所以$OP=2$.

故$\sqrt{x^2+(2-x)^2}=2$，解得，$x=0$或2，故点$P(2,0)$或$P(0,2)$.

[师]：这个题目你是如何分析转化的？

[生1]：根据相切构造Rt$\triangle APO$，由$\angle APO=30°$可知$OP=2$，进而可以求出点$P(2,0)$或$P(0,2)$.

[师]：很好，(追问)为什么想到这样转化？

[生1]：圆心是圆的重要构成，所以解决圆的问题一定要抓住圆心，就把条件转化成了点P到圆心O的距离问题.

[师]：很好，道出了圆问题的实质.

变式1：如果让点P动起来，当点P在直线$x+y-2=0$上运动时$\angle APO$能等于60°吗，请同学们思考？

[师]：$\angle APO$的大小由谁决定呢，点P在变化时$\angle APO$是如何变化的？

[生2]：在直角三角形APO中，$\sin\angle APO=\frac{1}{OP}$，所以$\angle APO$大小由$OP$长度决定，过圆心$O$作直线$x+y-2=0$的垂线段$OP_0$，当$OP$等于$OP_0$时取最小值为$\sqrt{2}$，此时$\angle APO$最大，最大值为45°，所以不存在这样的点$P$使得$\angle APB=60°$.

[师]：漂亮，把问题最终又转化成到圆心的距离问题，抓住了问题的关键.

[师]：通过OP的变化，可以发现$\angle APO$是如何变化的？

[生3]：当点P在圆外直线上变化时$\angle APO$存在最大值，不存在最小值；$\angle APO$的变化与OP的变化正好相反.

[师]：刚才只是P点在变，如果我们让点A也在圆上运动呢，这时$\angle APO$又是怎样一种情况呢？

[师]：当点A在圆上变化时$\angle APO$能等于60°吗，为什么呢？

[生4]：当点A是切点时$\angle APO$已经是最大了，点A向圆心方向运动时$\angle APO$在变小，所以由上面的结论知在

点A运动时$\angle APO$不可能等于60°.

［师］：$\angle APO$能等于30°吗，请看变式2.

变式2：已知圆$O:x^2+y^2=1$，点$P(x_0,y_0)$在直线$x+y-2=0$上，圆O上是否存在一点A使得$\angle APO=30°$？若存在，请求出点P横坐标x_0的取值范围；若不存在，请说明理由.

［生5］：由变式1可知，当PA是圆的切线时$\angle APO$取最大值，只要满足$\angle APB\geqslant 30°$即可；转化成$0<OP\leqslant 2$计算可得$x_0\in[0,2]$.

［师］：很好，请把这个方法再提炼一下.

［生5］：先转化成极限相切情况，再转化成OP长度问题.

［师］：转化成相切是一个极限特殊位置问题，如果不取极限情况呢，当点A变化时，PA与圆是什么关系，又可以怎么思考呢？

（通过设问把学生从切线垂直问题引到弦的垂直上，两类问题最终统一到利用直角三角形转化到圆心的距离问题上来）

［生6］：可以过圆心O向PA作垂线，垂足为M，在直角三角形OPM中，由$\angle APO=30°$可得，$OM=\frac{OP}{2}$.

又$0<OM\leqslant r$，即$0<OP\leqslant 2$，进而可以求得$x_0\in[0,2]$.

［师］：你是如何想到这种方法的？

［生6］：圆上除了切线直角三角形外，我们还常常用到弦的特征三角形，所以当点A变化时，PA是圆的割线可以构成弦，我就想到了构造特征三角形求解，最终转化成$0<OP\leqslant 2$就和第一种方法相同.

［师］：漂亮，通过点A的变化我们把切线与弦的问题最终都统一转化成与圆心O有关的距离问题.

［师］：如果我们再进一步在圆上构造两个动点呢，请看变式3.

变式3：已知圆$O:x^2+y^2=1$，点$P(x_0,y_0)$在直线$x+y-2=0$上，圆O上是否存在两点A、B使得$\angle APB=60°$？若存在，请求出点P横坐标x_0的取值范围；若不存在，请说明理由.

（学生根据上述问题的求解思路很快把这个问题解决了）

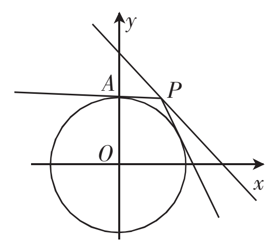
小结思考：通过对基础知识4问题串的设置，由浅入深、循循善诱让学生体会到知识的生成发展过程，通过一题多变再到多题归一，让学生探究到了解决这类问题的核心思想就是转化成到圆心的距离问题.并在解题中发现到一个结论：当点P在圆外直线上变化时，$\angle APO$存在最大值，无最小值；OP存在最小值，无最大值；$\angle APO$的变化与OP的变化正好相反.

例1　已知圆O的方程为$x^2+y^2=1$，若直线$y=k(x-2)$上存在一点P，过P作的圆的两条切线切点为A、B，若$\angle APB=120°$，求实数k的取值范围.

（［生7］提前在黑板上板演了解题过程）

［生7］：先求出$OP=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，O到直线$y=k(x-2)$的距离为：$\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}$，直线$y=k(x-2)$上存在点$P$等价于：$\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant\frac{2}{3}\sqrt{3}$，即$k\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

［师］：存在性问题除了转化成极限情况考虑还有哪些方法？（有两位学生主动站起来）



［生8］（主动站出来）：可以把存在问题转化成函数与方程思想，设点$P(x,k(x-2))$，由$OP=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，则$(1+k^2)x^2-4k^2x+4k^2-\frac{4}{3}=0$，要存在这样的点$P$只要方程有解，所以，由$\Delta\geqslant 0$，解得$k\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

［生9］：由$OP=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，可知点P的轨迹为圆：$x^2+y^2=\frac{4}{3}$，点P的存在性问题就可以转化成直线$y=k(x-2)$与圆$x^2+y^2=\frac{4}{3}$有公共点，即$\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant\frac{2}{3}\sqrt{3}$，解得$k\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

点评：我们解决问题一般从“数”、“形”两个方面入手，三位同学很好地利用了这两个方向把较为复杂的存在性问题，化归到容易上手的角度去解决，尤其是第三位同学在充分理解了圆的定义、直线与圆的位置关系等相关知识后，给大家提供了一个精彩的解法.圆的很多问题我们都可以转化到“形”的角度去求解，这是它与圆锥曲线问题的一个不同之处.

［师］：在高考中我们也常考查这类问题.

链接高考：（2012年江苏高考）在平面直角坐标系xOy中，圆的方程为$x^2+y^2-8x+15=0$，若直线$y=kx-2$上至少存在一点，使得以该点为圆心，1为半径的圆与圆C有公共点，则k的最大值是________.

（学生利用例1掌握的方法很好地从“数”、“形”解决了这个问题）

［师］：刚才我们化“无形”为“有形”是抓住了圆的定义，我们是如何找到圆的呢？请同学们思考，并看变式.

变式：在平面直角坐标系xOy中，圆O的方程为$x^2+y^2=4$，P为圆O上一点，若存在一个定圆M，过点P作圆M的两条切线PA，PB切点分别为A、B，当点P在圆O上运动时，

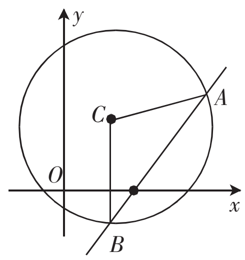
使得$\angle APB$恒为120°,求圆M的方程.

[师]:要想确定圆的方程需要确定哪几个量?

[生]:需要抓住圆心和半径.

[师]:那么应该选取哪个方向作为突破口?

[生10]:只要确定圆心M的位置就能很快地解题. 假设圆心M与圆心O不重合,我们先不去解题,先考虑这样一个问题:在平面直角坐标系xOy中,圆O的方程为$x^2+y^2=4$,P为圆O上一点,点M为平面内不同于O的一个定点.大家能不能通过这个条件自己编个题目提出问题或者看到这个条件能不能联想到曾经解决过什么问题.



很多同学在下面响应:求圆上点到点M距离的最大值和最小值.

[生10]:大家题目编完就发现了什么问题了?

[生]:你的假设不成立,所以圆心M与圆心O是重合的.

[生10]:得到圆心M与圆心O是重合的,那么问题我们就解决了,剩下的就是简单的计算了.假设圆M的半径为r,由$OP=\frac{2}{3}\sqrt{3}r$当两个圆心重合时,$\frac{2}{3}\sqrt{3}r=2$,即$r=\sqrt{3}$,所以圆M:$x^2+y^2=3$.

[师]:太漂亮了,通过一个假设、一个设问在不知不觉中就把这个问题解决了.

小结思考:例1问题串的设置,是对基础知识4的再发展,基础知识4是把问题转成"到圆心的距离"问题后围绕距离来进行解题,例1问题把这个"到圆心的距离"再发展成圆把复杂的变化问题化归到圆的定义,再从"形"入手使得抽象的问题图形化,解决起来更加直观、简洁明了,在解题中也体现了上述的结论:当点P在圆外直线上变化时$\angle APO$存在最大值,无最小值;OP存在最小值,无最大值;$\angle APO$的变化与OP的变化正好相反.

[师]:上述题目都是点在圆外问题,当点在圆内时又会发生怎样的变化,请看例2.

例2 在平面直角坐标系xOy中,已知点$P(3,0)$在圆C:$x^2+y^2-2mx-4y+m^2-28=0$内,动直线AB过点P且交圆C于A,B两点,若$\triangle ABC$的面积的最大值为16,求实数m的取值范围.

([生11]板书):圆C的标准方程为$(x-m)^2+(y-2)^2=32$,由点P在圆内,得$3-2\sqrt{7}<m<3+2\sqrt{7}$.

又$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r^2\sin\angle ACB=16\sin\angle ACB\leqslant 16$,

由题意存在$\angle ACB=90°$,此时圆心C到直线AB的距离$d=4$,

问题等价于$|CP|\geqslant 4$,即$\sqrt{(m-3)^2+2^2}\geqslant 4$.

解得$m\leqslant 3-2\sqrt{3}$或$m\geqslant 3+2\sqrt{3}$.

因此,m的取值范围是$[3+2\sqrt{3},3+2\sqrt{7})\cup(3-2\sqrt{7},3-2\sqrt{3}]$.

在学生讲解思路前设置两个问题:

问题1:直线变化时$\angle ACB$是如何变化的,受谁影响?

问题2:$\angle ACB$是否存在最值?如果存在请指出相应位置.

在学生充分思考、展示的基础上,通过几何画板进一步揭示$\angle ACB$的变化规律以及与CP的关系.

[师]:A的面积最大值能为16的关键是什么?又是如何转化解题的?

[生11]:$\angle ACB$能等于90°(也即圆心C到直线AB的距离能等于4),想到这一点后,原问题就转化成$|CP|\geqslant 4$.

(直接用该生的方法可以求得$\angle ACB=90°$是转化的关键,若用$S=d\cdot\sqrt{(4\sqrt{2})^2-d^2}\leqslant 16$,当且仅当$d=4$时取等号,也可以得到)

[师]:很好,通过研究$\angle ACB$的变化规律揭示了弦心距与CP的关系.

小结思考:例2是对前面研究的延伸和巩固,思想方法是一脉相承的,都是转化成到圆心的距离后,针对存在性进行化归转化求解.

在用几何画板把例2和前面题目的对比中学生发现了一个关键的不同点,当点在圆内时,角存在最小,无最大值;距离存在最大值无最小值.这体现了高三二轮复习的探究性和创造性——条件略作改变就得到一个截然相反的结论.

三、教学反思

本节课主要解决的问题是,把圆上切线、弦长、垂直等有关问题化归到与圆心的距离上进行求解,化归后和学生一起从"形"和"数"两个方面进行解题.第一个问题串让学生体会到圆上问题的核心是圆心,把条件转化到圆心上就能很快解题,第二个问题串的设立是对第一个的发展与提升,把圆心的问题进一步转化成圆的问题,透过圆从"形"的角度解决问题更简洁明了,例2的设立一方面是对前面转化方法的巩固提升,另一方面让学生体会到知识的创造性.

通过几个问题串的设立和训练,学生思维得到充分的锻炼,认识到知识的发展性,在发展中探究,在发展中创造,摆脱高三教学机械的"类型+方法"这种桎梏学生思维的模式,让学生透过显现抓本质,从容应对灵活多变的高考.Z