提炼关注点　提升核心素养　提高复习成效①

——以高考二轮复习“数列基本量的换算”为例

饶智荣

摘　要:新时代的高考要求对高考复习提出了更高的要求,以高考二轮复习“数列基本量的换算”为例,从提炼的五个关注点出发,例谈如何在二轮复习中,提炼关注点,提升核心素养,提高复习成效。

关键词:核心素养;二轮复习;数列基本量的换算

新时代的高考以立德树人为根本任务,以公平科学评价人才为主要使命,积极引导和促进教与学,与之共同实现德才兼备、全面发展的育人成才目标,并助力学生学业减负增效及教育教学提质目标。在此背景下,高考由“双基”考查转向能力考查,加强独立思考、逻辑推理、信息加工、阅读理解和应用写作能力(五大公共能力)等方面的考查力度,探索考查创新能力和实践能力的方式方法,不断推出探究性试题、开放性试题、情境化试题,因此,对高考复习也提出了更高的要求。对于数学核心素养的教学,史宁中教授认为应该从以下几个方面进行:把握数学知识的本质,把握学生认知的过程;创设合适的教学情境,提出合适的数学问题;启发合适的教学情境,提出合适的数学问题;启发学生思考,鼓励学生与教师交流、学生之间相互交流;让学生在思考和交流中在掌握知识与技术的同时,理解知识的本质;感悟数学思想,积累思维的经验,形成和发展数学核心素养。在高考二轮复习中也必须重视数学核心素养的提升。

下面以高考二轮复习“数列基本量的换算”为例,从提炼的五个关注点出发,例谈如何在二轮复习中,提炼关注点,提升核心素养,提高复习成效。数列题在高考试卷中重视基础知识和基本技能的考查,重视学科核心素养和数学思想方法考查。考查“基本量的换算”的题型常考常新。在高考二轮复习“数列”专题时,通过分析学生存在的问题和薄弱点,提炼出与此相关的五个关注点,让学生领会“数列基本量的换算”的五个关注点,从而提升“数学运算”“数学建模”等数学核心素养,提高逻辑推理和分析解决问题的能力。

关注点 1:灵活应用等差、等比数列的性质

等差数列与等比数列交汇的问题,常用“基本量法”求解,但有时灵活地运用性质,可使运算简便。要求同学特别熟悉等差、等比数列性质,特别关注数列项与下标的联系,简化条件,尽量列出易解方程。

【例 1】 (2017 年Ⅰ卷理科第 4 题)记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。若 $a_4+a_5=24$,$S_6=48$,则 $\{a_n\}$ 的公差为 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

【素养点拨】 本题用基本量法列出 a_1,d 的方程,可直接求解。但如果利用等差数列的性质可简化条件,易于求解。由 $S_6=48$ 得到 $a_3+a_4=16$,结合 $a_4+a_5=24$ 可得 $2d=8$,从而 $d=4$。

【真题链接】 (2016 高考新课标 2 理数 17)S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $a_1=1$,$S_7=28$。记 $b_n=[\lg a_n]$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,如 $[0.9]=0$,$[\lg 99]=1$。(Ⅰ)求 b_1,b_{11},b_{101};(Ⅱ)求数列 $\{b_n\}$ 的前 1000 项和。

关注点 2:熟悉设未知数的方法

在求解数列基本量问题时,一般设 a_1,$d(q)$,也可以设为 a_k,$d(q)$;如果等差数列已知和未知都只与 S_n 有关,设 $S_n=An^2+Bn$ 更好算,同样,如果等比数列已知和未知都只与 S_n 有关,可以设 $S_n=a(1-q^n)$;解题时要根据已知条件设有利于计算的未知数。

【例 2】 (2015 年Ⅱ卷文科第 9 题)已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{4}$,$a_3a_5=4(a_4-1)$,则 $a_2=$ (　　)

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{8}$

【素养点拨】 本题用基本量法直接列出公比 q 的方程,但此方程不易求解。由 $a_3a_5=(a_4)^2$ 可得关于 a_4 的方程 $(a_4)^2=4(a_4-1)$,解出 a_4,易得 $a_2=\frac{1}{2}$,大大减少了计算量。

【真题链接】 (2018 浙江)已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$,且 $a_3+a_4+a_5=28$,a_4+2 是 a_3,a_5 的等差中项,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$,数列 $\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$ 的前 n 项和为 $2n^2+$

①　本文为福建省“十三五”第一批中学数学学科教学带头人培养对象科研课题《高中数学“走班制”分层教学的实践研究》(课题编号:DTRSX2017019)的研究成果。

n,(1)求 q 的值;(2)求数列$\{b_n\}$的通项公式。

关注点3:重视解方程消元技巧

等比数列基本量换算题,经常会出现高次方程,需要同学有整体思想,经常将两个方程相减、相加、相除,从而实现消元。

【例3】 (2017江苏,9)等比数列$\{a_n\}$的各项均为实数,其前 n 项和为 S_n,已知若 $S_3=\frac{7}{4}$,$S_6=\frac{63}{4}$,则 $a_8=$______。

【素养点拨】 设$\{a_n\}$的首项为 a_1,公比为 q,则可得 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{7}{4}$ 和 $\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{63}{4}$,这时就要从消元降次的角度解这个高次方程组。

关注点4:重视不定方程求解技巧

数列与不定方程结合题,通常已存在性问题出现,一般问是否存在三项满足条件。难点在解不定方程,通常有:由不等式求范围找整数解,由整除条件找约数,由奇偶性否定,由有理数、无理数否定等方法。

【例4】 若$\{a_n\}$是各项均不为零的等差数列,公差为 d,S_n 为其前 n 项和,且满足 $a_n^2=S_{2n-1}$,若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$,$T_n$ 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和,(1)求 a_n 和 T_n;(2)是否存在正整数 $m,n(1<m<n)$,使得 T_1,T_m,T_n 成等比数列?若存在,求出所有 m,n 的值;若不存在,说明理由。

【素养点拨】 可求得 $a_n=2n-1$,$T_n=\frac{n}{2n+1}$,从而可得 $\left(\frac{m}{2m+1}\right)^2=\frac{n}{3(2n+1)}$,如何求解这个不定方程成为关键。由上式可得 $\frac{3}{n}=\frac{-2m^2+4m+1}{m^2}>0$,从而可得 $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$,$m$ 为正整数,所以 $m=2$。

关注点5:将数列性质与函数性质结合

数列是一类特殊的函数,函数定义域是正整数,因此在研究数列问题时要自觉地运用好函数性质,把它们有机地结合起来。数列与函数的综合问题一般是利用函数作为背景,给出数列所满足的条件,通常利用点在曲线上给出 S_n 的表达式,还有以曲线上的切点为背景的问题,解决这类问题的关键在于利用数列与函数的对应关系,将条件进行准确的转化。

【例5】 已知函数 $f(x)=x^3+x-\sin x$ 的定义域为 R,数列$\{a_n\}$是等差数列,若 $a_{1010}=0$,则 $f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{2019})$ ( )

A. 恒为正 B. 恒为正 C. 等于0 D. 可正可负

【素养点拨】 本题中 $f(x)=x^3+x-\sin x$ 是奇函数,$f(x)+f(-x)=0$,由等差数列的性质可得 $a_1+a_{2019}=a_2+a_{2018}=\cdots=2a_{1010}=0$,从而易得 $f(a_1)+f(a_{2019})=f(a_2)+f(a_{2018})=\cdots=0$。

【例6】 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$,(1)若 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant 0$,求 λ 的最小值;(2)数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,证明:$a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln 2$。

【素养点拨】 第(1)小题重点在于考查运用导数求解最值问题,第(2)小题重点在于考查运用函数性质求解数列综合问题,由于 $a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}$,若 $\lambda=\frac{1}{2}$,由(1)知,$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x(2+x)}{2+2x}$,且当 $x>0$ 时,$f(x)<0$,即 $\frac{x(2+x)}{2+2x}>\ln(1+x)$,令 $x=\frac{1}{n}$,则 $\frac{2n+1}{2n(n+1)}>\ln\frac{n+1}{n}$,$\therefore \frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}>\ln\frac{n+1}{n}$,$\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}>\ln\frac{n+2}{n+1}$,$\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+3)}>\ln\frac{n+3}{n+2}$,$\cdots$,$\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{4n}>\ln\frac{2n}{2n-1}$。以上各式两边分别相加可得 $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+3)}+\cdots+\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{4n}>\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\ln\frac{n+3}{n+2}+\cdots+\ln\frac{2n}{2n-1}$,即 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}>\ln\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}=\ln\frac{2n}{n}=\ln 2$,$\therefore a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln 2$。

高考二轮复习,重点在于“深化基础、针对问题、发展素养”,关键在于能力的提升,因此在复习设计上要以学生为中心(以生为本),以学生发展为行动目标,以学生现状为行动起点,确定微专题,提炼关注点,以促发思维为基本途径(以思维数学发展数学思维),以遵循规律为行动指南,不断提升学生学科核心素养,提高复习成效,才能适应新时代高考的要求和变化。

参考文献:

[1]史宁中.高中数学课程标准修订中的关键问题[J].数学教育学报,2018(1).

[2]王克亮.课堂问题的设计与解决应凸显知识本质[J].数学通报,2017(10).

作者简介:

饶智荣,福建省龙岩市,福建省连城县第一中学。