因此,ΔABC 面积的取值范围是$(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

评注:本题(1)把$\sin\frac{A+C}{2}$作为整体进行代换,本题(2)把$\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$作为整体,利用$\Delta ABC$是锐角三角形这个条件,确定$a$范围,进而确定出$\Delta ABC$面积的取值范围.这道高考题浓缩了三角函数、正弦定理的精华知识和方法,考查的很全面,是一道很好的考题.不同思维水平的学生处理起来进入角色的起点较低,到达终点的路径体现了本题较好的区分度.给考生创设自由的空间去"实现自我价值",也给高中数学教学引领了方向:"放弃机械大量的训练,注重数学思想方法的提炼,提升学生思维水平",这就是"数学的核心素养"!

总之,三角函数中的数学思想较多,但它们的核心是化归与转化思想,只要大家认真思考,灵活运用,在运用中感悟数学思想,积累思维经验,数学思想一定能给你的学习带来事半功倍的效果,只有这样,才能有效形成和发展数学核心素养.

一类含参分段函数零点问题:高三二轮微专题复习课例

江苏省常州高级中学 (213003) 刘丽嫔

微专题复习课是高三二轮复习的常见课型,是对高考中的部分重要内容进行专题性地深入剖析.分段函数是高考的重点内容,而含参分段函数零点问题题型灵活,笔者在近期曾开设省级公开课《一类含参分段函数零点问题》,课后经过专家点评,并再次修改,现以该课为例,谈几点对高三微专题复习课的一些思考,请广大同仁批评指正.

1. 课堂实录

1.1 热身小练

二轮微专题课,一般不采用直接回顾基本知识点的方式梳理基本概念及方法,可通过几个简单的热身训练引起学生对该内容的回忆.热身小题的设计一般短小精悍,难度小,入口浅,一下子能把学生带入到本课的学习中,通过学生对问题的解决以及教师的追问交流,回顾基本概念以及处理问题的基本方法,为后续的例题及变式的学习作铺垫.

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1,x<0,\\ x-\left(\frac{1}{2}\right)^x,x\geqslant 0\end{cases}$ 的零点个数为________.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 0,\\ \ln x,x>0,\end{cases}$ 的零点个数为________.

设计意图:分段函数在自变量x取不同的范围内有不同的解析式,处理其零点个数问题可以转化为求方程解的个数,如热身练习2;也可通过数形结合,转化为图象交点的个数.如热身1中,当$x\geqslant 0$时,$f(x)$的零点个数问题利用解方程较困难,利用数形结合更具优势.当$x\geqslant 0$时,令$f(x)=0$,得$x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,分别作出$y_1=x,y_2=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的图象,易观察出两函数图象的交点有1个.

1.2 例题讲解

例 1 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a,x<1,\\ 4(x-a)(x-2a),x\geqslant 1,\end{cases}$ $a\in R$.若$f(x)$恰有2个零点,则实数a的取值范围是________.

生1:分为以下两种情况

(1)$f(x)$在$x<1$时有1个零点,$f(x)$在$x\geqslant 1$时有1个零点.

当$x<1$时,令$f(x)=0$,即$2^x=a$,因为$x<1$时,$0<2^x<2$,则$0<a<2$.

当$x\geqslant 1$时,令$f(x)=0$,则$x=a$或$x=2a$,因为$0<a<2$,所以$a<2a$,则$a<1\leqslant 2a$,即$\frac{1}{2}\leqslant a<1$.

(2)$f(x)$在$x<1$时,有0个零点,$f(x)$在$x\geqslant 1$时,有2个零点.

当$x<1$时,令$f(x)=0$,即$2^x=a$,因为$0<2^x<2$,则$a\geqslant 2$或$a\leqslant 0$.

当 $x \geqslant 1$ 时,令 $f(x)=0$,则 $x=a$ 或 $x=2a$,则 $1 \leqslant a<2a$,$\therefore a \geqslant 1$. 即 $a \geqslant 2$.

综上,$\frac{1}{2} \leqslant a<1$ 或 $a \geqslant 2$.

师:你的解题思路很清晰,是怎样想到用这个方法解决的?

生 1:题目中说 $f(x)$ 恰有 2 个零点,当 $x<1$ 时,$f(x)$ 有 0 或 1 个零点,那么在另一段 $x \geqslant 1$ 时,对应地 $f(x)$ 有 2 或 1 个零点.

师:也就是说你把整个分段函数的零点问题,分解到了局部(板书:整体⇒局部). 在解题过程中,你用到了哪些思想方法?

生 1:数形结合,分类讨论.

师 2:数形结合给我们解决问题,尤其是填空题带来很大的方便. 在这道题目中,你还用到了分类讨论,那么是按照什么进行分类的,分类讨论的标准是什么?(板书:数形结合、分类讨论)

生 1:我是根据分段函数不同范围上零点个数情况分类的.

师:很好,由于分段函数的特点,这里我们可以按零点的局部分布情况进行分类.(板书:分类标准:零点的局部分布情况)

变式 1 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x}-1, x<a, \\ 4(x-1)(x-2), x \geqslant a,\end{cases}$ $a \in R$. 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点,则实数 a 的取值范围是________.

生 2:我在一个直角坐标系中,分别画出 $y_1=2^{x}-1$,$y_2=4(x-1)(x-2)$ 的图象如图 1,这两个图象的零点是确定的,分别是 0、1、2. 然后对 a 进行动态分析,$a \leqslant 0$ 时,$f(x)$ 有 2 个零点;$0<a<1$ 时,$f(x)$ 有 3 个零点;$1<a \leqslant 2$ 时,$f(x)$ 有 2 个零点;$a>2$ 时,$f(x)$ 有 1 个零点. 综上,$a \leqslant 0$ 或 $1<a \leqslant 2$.

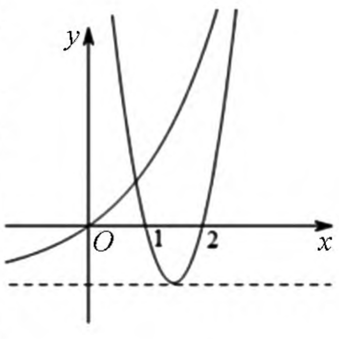

图 1

师:大部分同学的方法和你是一样的,那你是怎么想到这个方法的?

生 2:我一般填空题看到能用图象的先用图象试试.

师:采用了数形结合的方法,直观形象. 这里你也用了分类讨论,你是对什么进行分类的,分类讨论的标准是什么?

生 2:我对 a 进行分类,因为 a 是分段函数自变量分段的端点,a 不同,分段函数图象就不一样,导致零点情况也不一样. 分类的标准是 a 与 0、1、2 的大小关系. 其实 0、1、2 是 $f(x)$ 可能的零点.

师:分析得很到位,分段函数自变量分段的端点与零点的大小关系决定了函数的零点个数,所以,这是我们分类讨论的标准(板书:端点与零点的大小关系). 那我们一起看一看变式 1 和例 1 有什么区别?例 1 的方法变式 1 能用吗?

生 3:例 1 中参数 a 只出现在分段函数的解析式中,变式 1 中参数 a 只出现在分段点中. 我觉得也是可以用例 1 的方法解决的,令 $f(x)=0$,$x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=2$. 分两种情况:(1) $x<a$ 时,$f(x)$ 有 1 个零点;$x \geqslant a$ 时,$f(x)$ 有 1 个零点. 即 $\begin{cases}a>0 \\ 1<a \leqslant 2\end{cases} \Rightarrow 1<a \leqslant 2$;(2) $x<a$ 时,$f(x)$ 有 0 个零点;$x \geqslant a$ 时,$f(x)$ 有 2 个零点. 即 $\begin{cases}a \leqslant 0 \\ a \leqslant 1\end{cases} \Rightarrow a \leqslant 0$. 综上,$a \leqslant 0$ 或 $1<a \leqslant 2$.

师:很好,那这里分类讨论的标准是什么?

生 3:分类的标准是零点的局部分布情况.

变式 2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x}-1, x<a, \\ 2x^{3}-(6+a)x, x \geqslant a,\end{cases}$ $a \in R$. 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点,则实数 a 的取值范围是________.

生 4:当 $x<a$ 时,$f(x)$ 有 1 个零点或无零点,当 $x \geqslant a$ 时,$f(x)$ 有 0 个、1 个或 2 个或 3 个零点. 因为 $f(x)$ 恰有 2 个零点,可以分为两大类情况分类讨论.

(1) $f(x)$ 在 $x<a$ 时有 1 个零点,$f(x)$ 在 $x \geqslant a$ 时有 1 个零点.

则 $\begin{cases}a>0, \\ a+6>0, \\ \sqrt{\frac{a+6}{2}} \geqslant a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a>0, \\ a>-6, \\ -\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant 2\end{cases} \Rightarrow 0<a \leqslant 2$.

(2) $f(x)$ 在 $x<a$ 时有 0 个零点,$f(x)$ 在 $x \geqslant a$ 时有 2 个零点.

则 $\begin{cases}a \leqslant 0 \\ a+6>0 \\ -\sqrt{\frac{a+6}{2}}<a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a \leqslant 0 \\ a>-6 \\ -\frac{3}{2}<a<2\end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2}<a \leqslant 0$.

综上,$-\frac{3}{2}<a \leqslant 2$.

师:这里的分类标准是什么?

生 4:分类的标准也是零点的局部分布情况.

生 5:也可以用数形结合,画图象解决. 当 $x \geqslant a$, $f'(x) = 6x^2 - (6+a)$,当 $a \leqslant -6$ 时,$f'(x) \geqslant 0$ 恒成立,所以 $x \geqslant a$ 时,$f(x)$ 单调递增,结合图象可知,$f(x)$ 只有一个零点 0,不符题意. 当 $a > -6$ 时,作出图象如图 2,令 $f(x) = 0$,则 $x = 0$ 或 $x = -\sqrt{\dfrac{a+6}{2}}$ 或 $x = \sqrt{\dfrac{a+6}{2}}$. 由动态分析可知,当 $-\sqrt{\dfrac{a+6}{2}} < a \leqslant \sqrt{\dfrac{a+6}{2}}$,即 $-\dfrac{3}{2} < a \leqslant 2$ 时,符合题意. 这里的分类标准是分段函数自变量的端点与零点的大小关系.

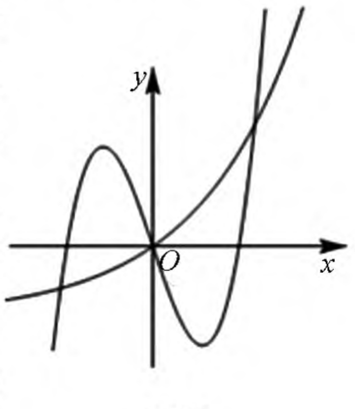

图 2

师:看来同学们对这类问题的处理已经渐入佳境,下面请大家挑战一下变式 3.

变式3　已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leqslant a \\ 8 - x, & x > a \end{cases}$ $(a > 0)$,若函数 $g(x) = f(x) - 3|x|$ 有三个零点,则正数 a 的取值范围是________.

生 6:函数 $g(x) = f(x) - 3|x|$ 也是分段函数,但是比前面的例 1 及变式题要复杂,主要原因是自变量的取值范围可以分成三段,比较难入手.

生 7:可以按零点的局部分布情况分类讨论. 这里有一个突破口,就是 $a > 0$,所以 $x \leqslant 0$,$f(x) = x^2 - 2x$,所以 $x \leqslant 0$ 时,$g(x) = x^2 - 2x + 3x = x^2 + x$. 令 $g(x) = 0$,得 $x = 0$ 或 $x = -1$. 又由题,$g(x)$ 有三个零点,所以 $x > 0$ 时,$g(x)$ 有且仅有一个零点. 若 $0 < x \leqslant a$ 时,$f(x) = x^2 - 2x$,$g(x) = x^2 - 2x - 3x = x^2 - 5x$,令 $g(x) = 0$,得 $x = 0$(舍)或 $x = 5$,若 $x > a$ 时,$f(x) = 8 - x$,$g(x) = 8 - x - 3x = 8 - 4x$,令 $g(x) = 0$,得 $x = 2$,若 5 是异与 -1、0 的第三个零点,则 $a \geqslant 5$;若 2 是异与 -1、0 的第三个零点,则 $0 < a < 2$. 综上,$0 < a < 2$ 或 $a \geqslant 5$.

师:看来找到了问题的突破口,分三段的分段函数零点问题也不是难事了. 仔细想想,这个突破口似乎也是我们解决问题的必经之路,分段函数自变量可以分成 $x \leqslant 0$、$0 < x \leqslant a$ 和 $x > a$ 三段,一般我们也总是先从 $x \leqslant 0$ 这一段不带参数的解析式开始求零点个数.

生 8:也可以分别画出函数 $y_1 = 3|x|$、$y_2 = x^2 - 2x$、$y_3 = 8 - x$ 图象如图 3,通过动态分析来解决.

师:很多同学看这个问题有点复杂,就不太敢用这个方法做下去了,你是怎么考虑的?

生 8:其实主要是看参数 a 在分段函数的哪个位置,这道题 a 只出现在自变量的分段点,所以画出三个函数图象,求出可能的零点很轻松. 像变式 3,参数 a 还出现在函数解析式中,要是给出的函数解析式再复杂点,这个题用画图可能就很困难了.

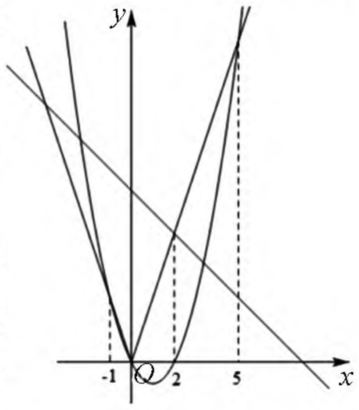

图 3

师:讲得太好了!看来同学们对于这类问题的处理已经有了自己的一些心得体会了.

设计意图:例题和变式是课堂的主体,在这一环节中,学生和学生、学生和老师之间通过交流、探索,逐步体会处理这类问题的方法策略,学生的思维与解题能力也将得到提高.

1.3　小结提炼

今天的课堂你有哪些收获?

生 9:今天题目的解法中,我印象比较深刻的是按照零点的局部分布情况分类讨论的做法,先分析分段函数中某一段上零点的情况,我觉得通常是单调函数的那段零点情况比较简单,从而找到问题的突破口.

生 10:做这类题目数形结合经常会事半功倍.

生 11:几个题目看起来不太一样,参数有的在分段函数的分段点,有的在函数解析式,甚至有的分段点和解析式都有参数,我觉得这些都不是关键,不要被吓住,分段点和零点才是需要特别关注的.

师:大家都总结得很好,看来大家对这类问题中的数形结合,尤其是分类讨论有了更深刻的理解。分类讨论中分类标准是难点,这里我们按照自变量的端点与零点的大小关系和按零点的局部分布情况分类,这些都是由分段函数的特点决定的.

设计意图:微专题的复习课可以让学生多参与课堂小结,可以是对某个题解题的启发,也可以是对某种方法的感悟。

2. 微专题课的实践思考

2.1　以方法为主线,选择复习专题

微专题课题的选定,应根据具体的内容及学情来决定.如含参分段函数零点问题涉及的题型较多且较灵活,作为一节微专题课,把各种题型整理罗列、蜻蜓点水地讲一遍,是没有太大意义的.若能针对某一种题型的具体解题方法进行深入分析,掌握理解其处理方法,不失为一节有价值的微专题课.本节课的课题曾经从《含参分段函数问题》,调整到《含参分段函数零点问题》,最后调整到《一类含参分段函数零点问题》,虽然课堂上没有出现各种方法精彩呈现的状况,但是相信对学生解题思维的锻炼和方法的掌握是有帮助的.类似的专题有很多,如利用基底向量处理向量数量积问题、数列中的整除问题、隐圆问题,解几中的线段比问题等.

2.2　以变式为手段,逐步深入探究

微专题课中题目的选择需要教师的整合、改编.教师根据希望让学生掌握的某种解题方法,根据学情对一些题目进行改编整合,例题加变式题组的形式可以较完整地构建该问题的常用方法,完善方法体系.变式题组通常由浅入深,逐步推进,带领学生逐步了解问题的本质及内涵,掌握其解决问题的方法.不同难度的题组也使得各个层次的学生都能有所收获,有助于激发学生的学习热情.

2.3　以学生为主体,实施课堂教学

高三二轮微专题的复习,学生已经掌握一定的解决问题的方法,课堂上完全可以给学生更大的舞台,让学生交流解决问题的方法、困惑,以及收获,发挥学生的主体作用.可由学生上黑板板书或者实物投影等方式呈现,有时学生的解题并不完美,大多数问题学生之间的交流都能进行一定程度的完善.比如可能会有一些典型的错误,可能来自审题的不仔细,或者对概念的混淆,学生之间的纠错往往更能加深印象.更多的时候是示范性的解答,这对答题学生是一种非常积极的鼓励,对其他同学更是起到榜样的示范作用,也便于教师更加真实地了解学生的实际学习情况.一般让学生长期参与表达的课堂,学生的整体表达能力与胆识都明显比较高,学生的学习积极性也比较强.

2.4　以教师为主导,注重提升优化

课堂中以学生为主体的同时,也需要发挥教师的主导作用,主要体现在以下几个方面:

① 把握课堂节奏.课堂中学生展示的机会越多,课堂的不可控性就越多,需要教师的经验及智慧调控整个课堂.课堂中学生的思维值得肯定时,需要教师的赞赏;学生的思路有待商榷时,需要教师及时地引导学生更深层次地思考;学生的思维受阻时,需要教师有台阶、小步子地引导.

② 追问思维过程.微专题课基本都是在解题,学生往往回答问题时就是一个计算结果或者是一个简答.这时,需要教师不断地追问,暴露其思维过程,让学生知其然,更知其所以然.教师不断追问的过程,就是在引导学生思考解决问题的突破口、难点、重点,以及易错点.所有看似随意的追问,都是教师的有意为之.

③ 优化方法策略.学生的解题方法往往五花八门,有时未必能找到比较简洁的解题策略,这时需要教师的智慧,巧妙地在学生的解题策略上加以改进、优化,让学生在解法上得以优化提升.

高三圆锥曲线综合题的教学例析

江苏省无锡市洛社高级中学　(214187)　吴永娇　徐荣新

高三复习中圆锥曲线综合题对学生来说有一定的难度,学生面对复杂的条件和图形往往较难自主寻找到突破口,同时对于计算也存在着畏惧心理.结合圆锥曲线中重点关注椭圆的要求,笔者就高三复习中椭圆综合题的教学做一总结,与读者交流.

1.由图溯源,找突破口

对于学生来讲,圆锥曲线综合题的难点之一就是参数的选择(设点还是设直线),为后续问题的解决开头.在很多问题中由于题目的叙述束缚了学生的思维,或者让解题思路迷茫,因此在教学中笔者常在标准方程的解决后,把图像向学生呈现,让学生观察图形思考图形的产生过程,进而确定解决问题的