【课堂聚焦 · 教学设计】

基于问题解决视角下的教学设计与实践

——以“平面向量的数量积”复习课为例

杨璧华，文尚平

（南宁市第二中学，广西南宁 530028）

【摘 要】基于高考“考查问题—小问题—具体问题”的高中数学问题解决的教学实施，主要包括教学原则、教学模式和教学设计三大实施策略，而基于问题解决的教学设计，应当以创设数学情境、提出数学问题、开展数学对话为主要手段，以锻炼和提升数学思维能力、方法技能为根本任务，以学会提出问题、分析问题、解决问题，最终实现和发展学生数学核心素养为基本目标。

【关键词】问题解决；数量积；二轮复习；教学设计

一、问题提出

《普通高中数学课程标准（2017版）》提出的课程建设目标是通过数学课程的学习，让学生获得进一步学习以及未来发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验（简称“四基”），提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力（简称“四能”）[1]。数学家哈尔莫斯认为，问题是数学的心脏，波利亚则把数学当成是一门问题解决的学科，并把问题解决作为数学教学的焦点。可见，解决问题的教学已经成为数学教学的核心，围绕问题解决而开展的探究学习，既是数学教学的一种理念、策略和方法，也是数学课堂教学的一种基本组织形式。所以，围绕问题解决而展开的教学设计，既需要数学学习论、数学教学论的理论基础，又需要运用系统方法分析数学问题，确定数学教学目标，设计解决数学教学问题的策略方案、试行方案、评价试行结果和修改方案[2]。

基于问题解决的教学设计一般需要关注四个问题：①我们要到哪里去？（教学目标的设立）；②我们如何确保才能到达那里？（教学任务的分析）；③我们怎么到达那里？（教学策略的实施）；④我们怎么知道已经到达那里？（教学评价的反馈），如图1所示。所以，在数学教学设计中，从实施教学分析，拟订教学目标，到开发教学策略，再到组织实施教学评价，实际上就是教学主体的内外部条件和教学事件的系统化问题。因此，基于高考“考查问题—小问题—具体问题”的高中数学问题解决的教学设计，需要教师根据不同的学习结果，创设不同的学习内部条件并安排相应的学习外部条件。笔者以“平面向量的数量积”复习课教学为例，探索关于数学问题解决视角下的教学设计与实践。

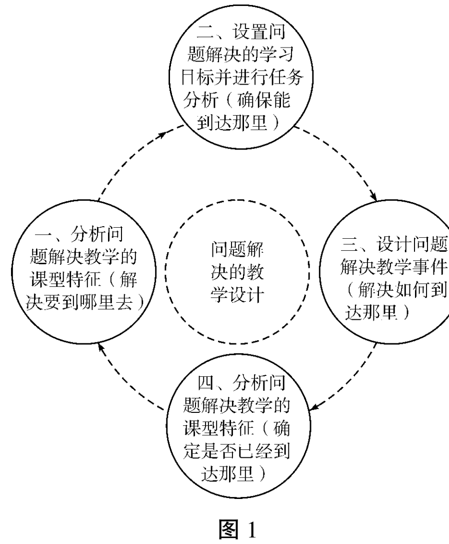

图1

【作者简介】杨璧华，一级教师；文尚平，高级教师，南宁市学科带头人，广西基础教育名师青蓝工程培养对象。

【基金项目】2021年广西“十四五”教育科学规划B类重点课题“基于核心素养下高中数学‘学、教、评一致性’教学设计的理论与实践研究”（2021B200）

二、教学分析

1. 教材分析

平面向量的数量积涵盖了几何、代数及三角函数三大板块的主干知识，背景知识丰富。笔者通过对近5年高考数学全国课标卷试题的研究发现，课标卷中平面向量的考查题型基本以客观题为主，内容以平面向量的基本定理的应用，数量积（范围）的求解，模长、夹角的计算为主，解法上弱化解题技巧而注重通性通法。常与函数的构造、三角函数范围、不等式与最值、解析几何与平面几何、立体几何空间角等内容进行考查，体现平面向量的工具性和应用性，考查学生数学运算、逻辑推理、综合分析解决问题的能力（如图2）。基于平面向量数量积的复习，应重点关注求夹角、求模、求数量积三个小问题解决过程中的知识要求、运算要求、推理要求及逻辑思维的要求。所以，弄清楚问题解决作为一种学习结果，方可为安排相应的学习外部条件提供科学依据。

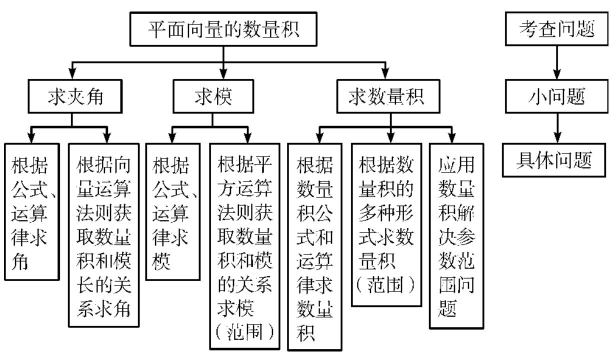

图2

2. 教学目标

根据问题解决教学的课型特征设立教学目标，并将目标细化为一系列子目标。因此，平面向量的数量积复习应该以问题解决作为教学目标，教学目标如下。

（1）通过题组训练，使学生掌握数量积、夹角等概念，并掌握数量积的运算公式、运算法则、运算方法。

（2）通过考查问题，培养学生学会发现问题、分析问题的意识，进一步强化求解数量积的基本策略和方法。引导学生学会关联并实施运用基底法、坐标法求解平面向量数量积，并在学习过程中并通过问题变式，层层深入，使学生掌握并能熟练运用这两个方法。

（3）通过课堂交流，提升学生分析问题、解决问题的能力，培养学生学会思考、学会聆听、学会合作、学会交流的能力。

3. 教学重难点

（1）教学重点：复习并掌握定义法、基底法、坐标法求解数量积，并在此基础上拓展极化恒等式及应用。

（2）教学难点：学会灵活应用求解平面向量的数量积的方法。

根据问题解决教学习得知识的过程和条件设计学习的外部条件，明确如何到那里。所以，教学设计中的重难点设立应遵循“一明一暗”（知识与方法）两条线的原则。本节课的“明线”是向量数量积问题解决的结构知识，“暗线”是数量积问题解决的思想方法。问题的设计也是由具体知识到解决问题工具，再到解决问题思想方法，梯度式地发展学生核心素养。

4. 教学关键点

（1）教学设计中，问题的设计、生成与变式，是追求有效教学的重要因素，数量积求解过程中，需要对照教学目标检测学生的学习效果，确定是否已经到达那里。

（2）向量具有良好的运算性质，数量积可以使图形中的夹角运算、距离运算有效地转化为向量运算，所以教学设计必需先解决知识的上下位关系，同时需要解决向量运算所蕴含的思想方法的提炼、开发和实施评价，以确定我们怎么知道已经到达那里。

三、教学过程设计

环节一：基于课型特征，解决要到哪里去的问题

通过教学前测，了解学生对平面向量数量积知识的掌握情况，并通过限时训练，激发学生的学习主动性，明确本节课的学习目标。

课前小测（5分钟）

1. 若$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$的值__________。

2. 若$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，求$2\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角__________。

3. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，$AC=2$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的值__________。

4. 若$\vec{a}=(x,4)$，$\vec{b}=(-2,-1)$，如果$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，求x的取值范围__________。

5. 如图3，在平行四边形$ABCD$中，$AB=\sqrt{2}$，$AD=1$，E为DC的中点，AE与BD交于点M，若$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-\frac{4}{9}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$__________。

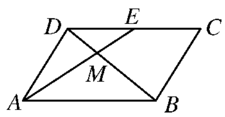

图3

【设计意图】基于问题解决视角下的教学设计，需要回答的第一个问题是：我们要到哪里去？即教学目标是什么？问题解决的教学目标应该具有“导教、导学、导测评”的功能，通过课前测试，实施教学分析，以确定我们要到哪里去，并为课堂活动的实施做好铺垫，让学生明确学习目标、重点、难点，带着问题进行学习。

环节二：设置问题解决的学习目标并进行任务分析，解决确保能到那里去的问题

解决到哪里去的问题，首先，教师需要引导学生用外显的行为动作与内部心理过程相结合的方式进行任务分析，让学生明确到哪里去。

师：时间到，请5题都做了的同学举手，请5题都做对的同学举手。

师：你做对了哪几题？有什么体会？你是因为什么原因错了这一题？错在哪里？

由于前面已经系统复习了平面向量数量积的定义，以及夹角、模的求解等知识，学生基本可以熟练地运用定义法、投影法、基底法、坐标法等基本方法求数量积，初步掌握了研究向量问题的基本思想和方法。设计课前小测，是为本节课新问题的复习与探究热身。第1题意在巩固平面向量数量积的定义，第2题揭示了模与夹角的运算离不开数量积的求解，第3题意在让学生体会求数量积常用的几种方法，第4题意在考查向量数量积小于0与向量夹角为钝角并非等价关系，第5题意在巩固向量运算法则与基底转化法。

其次，教师引导学生学会归纳总结求数量积常用的形式：（1）夹角形式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$；（2）坐标形式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$；（3）投影形式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\theta)=|\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta)$；（4）余弦形式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}[\vec{a}^2+\vec{b}^2-(\vec{a}-\vec{b})^2]$；（5）极化恒等式形式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}[(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2]$。

接着，结合数量积求解的常用形式，教师引导学生思考求数量积公式的方法：定义法、坐标法、投影法、基底转化法。最后，教师请学生归纳与数量积的运算有关的公式：（1）$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$；（2）$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$；（3）$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$。

【设计意图】运用学习结果分类理论，将学习目标细化为一系列子目标，提示学生回忆先决知识技能。通过师生互动、生生互动，归纳出数量积求解公式的五种形式、四种方法，以及与之相关的上下位知识，这既是平面向量数量积复习课教学目标达成的一部分，也是问题解决视角下背景分析、路径探究的重要环节。

环节三：设计问题解决教学事件，解决如何到那里的问题

解决如何到那里的问题，需要教师在教学设计中呈现设计的样例，样例要有针对性、互补性，才能有效促进问题的解决。

例1 如图4，在正方形$ABCD$中，$AB=2$，点E为BC中点，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$的值_________。

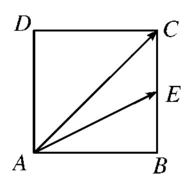

图4

【设计意图】基于问题解决视角的数学教学设计，教师需关注以下问题：我们如何到达那里？即教学策略是什么？通过开发有效的教学策略，以确定我们如何到达那里。向量数量积问题的求解，需要掌握最基本、最常用的三大形式（定义式、基底式、坐标式），这是确保教学目标实现的基本环节。

例2（2017年高考新课标Ⅱ卷，理12）已知$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，P为平面ABC内一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值是（　　）

A. -2　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. -1

平面向量的最值问题通常需要找到合适的变量，例2的设计意在引导学生寻找到已知变量和未知变量之间的关系，促进学生对数量积求解方法的理解。

师：结合我们刚才归纳的方法，对于例2，同学们会选择什么方法求解呢？

学生在教师的引导下，展现以下三种解题方法。

方法1：$\overrightarrow{PA}$与$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$共线且反向，即点$P$位于中位线$AD$上，设$AP=x$，则$PD=2(\sqrt{3}-x)$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=-2x\cdot(\sqrt{3}-x)=2x^2-2\sqrt{3}x$，当$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取得最小值$-\frac{3}{2}$。

方法2：以AB为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴，设点$P(x,y)$，BC边的中点$D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2(-1-x,-y)\cdot\left(\frac{1}{2}-x,\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)=2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]-\frac{3}{2}\geqslant-\frac{3}{2}$。

当且仅当$x=-\frac{1}{4}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取得最小值$-\frac{3}{2}$。

方法3：设中线AD的中点为M，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=2\times\frac{1}{4}[(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD})^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PD})^2]=2\left(\overrightarrow{PM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}^2\right)=2\overrightarrow{PM}^2-\frac{3}{2}\geqslant-\frac{3}{2}$。

通过以上三种解法，学生总结出以下解题规律。

（1）当两个向量共线反向时，数量积达到最小值；当共线同向时，数量积达到最大值。

（2）极化恒等式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}[(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2]$，常与边的中点有关。

课堂教学，功在预设，贵在生成。根据课堂中学生的实际情况，教师应及时作出教学调整，提供反馈与纠正。关于平面向量数量积的考查，除了考查概念、公式等基础知识，还要考查相关的基本技能与方法，而结构不良条件下的数量积求解，需要学生具备合理的转化与划归能力。笔者根据学生学情，设计了以下例题及变式。

例3 如图5，在三角形$\triangle ABC$中，D是BC的中点，$AD=3$，$BC=10$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$__________。

变式1 如图6，线段AB为圆O的直径，M为圆O的弦CD上一动点，且$AB=8$，$CD=6$，求$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$的取值范围__________。

变式2 如图7，在平面四边形$ABCD$中，O为BD的中点，且$OA=3$，$OC=5$，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-7$，则$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$的值________。

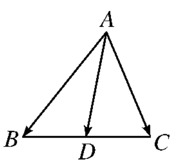

图5

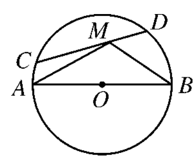

图6

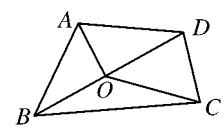

图7

【设计意图】 考查问题及变式，意在活学活用。极化恒等式的优点是方便利用已知条件，用整体、方程、化归思想把复杂的几何问题转化为简单的代数问题。学生在利用前面掌握的方法求解例3时，由于很难处理条件中的夹角、模、基底之间的相互关系，因此解题思维受阻。这时，就需要突破原有的知识结构，探索新的方法。

例4 如图8，在矩形$ABCD$中，已知$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，点E为BC的中点，点F在边CD上，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$________。

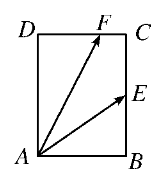

图8

变式1 已知$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$CA=CB=2$，M，N是斜边AB上的两个动点，且$MN=\sqrt{2}$，求$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$的取值范围__________。

【设计意图】 提升学生的运算能力，关键在于帮助学生提升算法与算理的能力。平面向量数量积求解中的动态问题，如果只从几何图形要素“边、角、面积”出发，受知识结构的影响，学生分析问

题的思维一般会受阻。而如果从几何问题代数化的角度考虑，使运算最终落在函数的图象与性质上，此时从平面图形的基本特征出发，建立直角坐标系，可以帮助学生有效解决平面向量数量积动态问题。

环节四：分析问题解决教学的课型特征，解决确定是否已经到那里的问题

课堂教学是否已经达到预期目标，学生是否已经掌握了本节课的基本知识、基本技能、基本方法，教师可以通过归纳总结、对话交流等形式，进行检查迁移。

基于考查问题的主线，本节课按“考查问题——小问题——具体问题”展开，规律如图9所示。

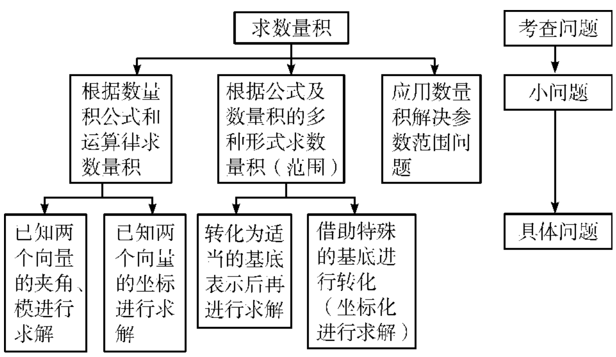

图9

平面向量考查关键问题的试题一般遵循以下三个维度的命题原则：能力立意（维度一）、情境（维度二）、设问（维度三）。基于上述三个维度，我们归纳如下。

1. 求解平面向量数量积的小题题型结构（题胚）

已知：向量（三角形、四边形）的模长（与模有关的等式）、夹角、点（动点）、坐标。

求：某两个向量的数量积的值（范围）。

2. 基于关键考查问题的变式

从问题表征角度归纳总结向量数量积考查问题的题型结构（题胚），并从问题变式角度归纳总结向量数量积问题的考查本质特点，目的是归纳解题的一般方法，获得解决此类问题的规律。（1）条件变式：变换平面图形，恒等式结构，使得运用数量积公式时能够准确选择合适的求解公式。（2）结论变式：根据条件求数量积的值或范围。

【设计意图】从问题解决的视角进行数学教学，不应该只是侧重于解决常规的数学问题，还应该鼓励学生在给定的情境中提出问题或者通过修改原问题的条件创设新的问题。

四、教学反思

学起于思，思起于疑。问题既是学生思维的起点也是学生思维的动力源泉，既是教学策略也是教学组织的基本形式。所以，教师在理解好教学内容、明确好教学目标、把握好内容本质的基础上，要提出并设计合适的、递进式的问题，引导学生的展开更深入的思维训练。基于问题解决的教学设计，要明确问题解决与教学设计之间的关联性，主要体现在以下四个方面。

（一）问题解决的关键在问题图式的获取与迁移

基于高考“考查问题—小问题—具体问题”的高中数学问题解决，问题的提出是前提，但如何培养学生提出问题的能力目前依然值得我们深思。数学情境是问题解决的场域，也是问题表征的维度之一，所以可以通过对问题表征的转变进而实现问题的转化，还可以引导学生学会用数学语言表达数学问题，通过问题交流来开展问题解决的过程性数学活动，以及通过问题拓展来实现对问题解决的延续[3]。我们只有充分了解这些，才能更好地实施问题解决的教学设计。整个流程图大致如下（如图10）。

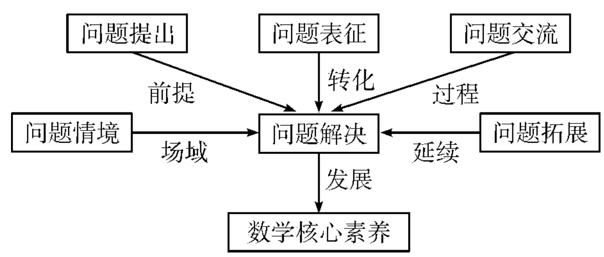

图10

（二）问题解决教学设计要回答好四个问题

基于高考“考查问题—小问题—具体问题”的高中数学问题解决的教学实施策略，主要包括教学原则、教学模式和教学设计的策略[4]。而基于问题解决的教学设计，需要回答四个问题，即教学目标、教学任务、教学策略、教学评价的问题。

（三）问题解决习得的内外部条件是有破有立的问题设计

课堂是教学的主阵地，做好问题解决的课堂教学设计，对于提高教学质量，促进学生能力素质发展具有重要意义。本节课从“考查问题→小问题→具体问题”三个层面组织开展教学活动，教学设计需层层推进，并且要有破有立。“考查问题”体现了对历年平面向量高考试题的研究与再利用，体现了整体掌握高考试题考查的难度、方向的设计思想，是高考第二轮复习必不可少的工作。“小问题”体现了对高考平面向量试题中考查的思想方法的提炼与加工，“具体问题”体现了对平面向量具体知识点的复习与呈现。基于高考试题的内容研究，抽象出考查的思想方法、能力维度，再回到具体知识点的归纳与复习。

基于问题解决的教学设计，教师既要关注设计的问题本身是否符合教学目标，也要关注问题的生成是否“自然”，还要关注问题的解决过程是否很好地发展了学生的数学学科核心素养，所以教师提出有价值的问题，目标指向应该是鼓励和培养学生提出有价值的问题，最终落实“四基”“四能”。

参考文献：

［1］中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017版）［M］. 北京：人民教育出版社，2018.

［2］邓新星，莫宗赵，周莹. 数学教学设计的研究现状与展望［J］. 中学数学，2020（10）：96-99.

［3］方小芹. 基于“学习的条件和教学论”的问题解决教学设计［J］. 中小学数学，2016（11）：4-6.

［4］杨勇. 核心素养下高中数学问题解决策略［J］. 教学与管理，2019（11）：60-64.

（责任编辑：陆顺演）

（上接第24页）

师：说得非常好。“我且受用这无边的荷香月色好了”似乎是在自我宽慰，让自己暂时放下现实生活的束缚、责任、烦闷，从现实生活中抽离出来。这里还读出了一种什么意味？

生：无奈。

生：还有一种“我太难了”的感觉（生齐笑）。

师：是的，“我太难了”，想忘记平日的烦忧又好像没有忘记，像是自由的又好像不是，想暂且受用这荷香月色，但又好像难以摆脱现实中的“不宁静”。所以，他眼里的月下荷塘也多了一种似真似幻、亦实亦虚的梦幻色彩，是吗？

【教学反思】“今晚”的荷塘是“日日走过的荷塘”吗？当然可以说“是”，因为文章第一段就有明证：“忽然想起日日走过的荷塘……总该另有一番样子吧。”“今晚”“另有一番样子”的理由似乎也一望而知：“在这满月的光里。”但我们不难发现“总该”二字中蕴含了作者内心的一种期待和渴望，而且“没有月光的晚上……有些怕人”，“今晚却很好，虽然月光也还是淡淡的”。月光“也”还是淡淡的，说明月光和之前一样，但是“我”“今晚”的感受和心情不一样，所以“今晚却很好”，没有“阴森森”“怕人”的感觉。可见荷塘“今晚”的这番样子是“今晚”的“我”感受到的样子，是“日日走过的荷塘”又不同于“日日走过的荷塘”，是属于当晚的朱自清的，是任何人未曾见过的，也是平日的朱自清未曾见过的。这就是我们经常说的“一切景语皆情语”“以我观物，物皆着我之色彩”。

散文重在抒发作者独特的感受，贵在有“我”。因此，品读散文就要体会作者的个人性情、微妙情绪和独特感悟。读写景抒情散文，如《荷塘月色》《故都的秋》等，要关注作者笔下的自然景物描写、欣赏其表现自然景物的角度和艺术手法，更要关注作品的言说对象（荷塘月色、北平的秋天），因为它们都是作者个人化的言说产物，是作者特殊情境中的独特体验，作者常写的是眼见之景更是心见之景。只有在注重散文情感的同时，关注散文的言说对象，才不会脱离散文旨在抒情的文体特点。

参考文献：

［1］郑桂华. 从两个句子理解《荷塘月色》的两处关键［J］. 语文学习，2011（11）：35-36.

（责任编辑：蒋素利）