现位置会给学生带来不同的情感体验. 在运用方式方面,教师要借鉴教材,采取顺应式和重构式的方式,以此来保证史料的时代适用性. 在史料呈现位置方面,教师可以在章开头设置“数学史学习任务清单”. 例如“圆锥曲线的方程”这一章涉及了大量的史实知识,从梅内赫莫斯的“梅氏三线”到欧几里得的《圆锥曲线》,再到阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》和安提缪斯的“两钉一线”椭圆画法[9],学生只有了解圆锥曲线的产生发展历程,对知识的建构才会更加深刻. 在学习本章之前,教师可以预先列出每一节涉及的史料,引导学生自主探索,调查圆锥曲线的发展历程,激发学生的学习兴趣,促进学生主动认知.

4.3　史实材料的选取要兼顾“德育”和“智育”,培养学生数学核心素养

数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度和价值观的综合体现[10],即核心素养的培养要兼顾“德育”和“智育”. 数学史在数学与人文之间架起了一座桥梁,因而在德育上可以发挥独特的优势[9]. 因此,教师在史料的选取过程中,在保证趣味性、科学性、可学性、有效性、人文性的史料选取原则下[11],要重视中国传统文化中的数学元素,兼顾学生的德与智共同发展. 例如,在介绍《赵爽弦图》的过程中,也可以将赵爽“负薪余日,聊观《周髀》”的故事介绍给学生,这样既让学生了解了赵爽弦图,发展了学生的“智”,又让学生感受到赵爽刻苦钻研的精神,培养了学生的“德”.

参考文献

[1]　史宁中,吕世虎,李淑文.改革开放四十年来中国中学数学课程发展的历程及特点分析[J].数学教育学报,2021,30(01):1-11.

[2]　刘云,朱维宗.高中数学必修教科书中数学史内容的呈现方式探析[J].数学教育学报,2012,21(02):86-89.

[3]　徐乃楠,孔凡哲,刘鹏飞.高中数学教科书中的数学史呈现研究[J].数学教育学报,2015,24(02):61-65.

[4]　张盛熔.新人教 A 版高中数学必修册教科书中数学史内容的研究[D].武汉:华中师范大学,2020.

[5]　Lorin W.Anderson 等.布卢姆教育目标分类学修订版:分类学视野下的学与教及其测评[M].蒋小平等译.北京:外语教学与研究出版社,2009,21-48.

[6]　蒲淑萍,汪晓勤.数学史怎样融入数学教材:以中、法初中数学教材为例[J].课程·教材·教法,2012,32(08):63-68.

[7]　胡耀华.数学写作的价值及若干教学建议[J].数学教育学报,2007,56(03):60-62.

[8]　杨渭清.数学史在数学教育中的教育价值[J].数学教育学报,2009,18(04):31-33.

[9]　汪晓勤,沈中宇.数学史与高中数学教学——理论、实践与案例[M].上海:华东师范大学出版社,2020:60.

[10]　中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:4.

[11]　陈晏蓉,汪晓勤.数学史料的选取原则与案例分析[J].教育研究与评论(中学教育教学),2017(12):37-43.

作者简介　常海斌(1999—),男,吉林公主岭人,硕士生;主要从事数学教育研究.

利用开放式问题引导主题式学习的一些尝试及思考*

江苏省木渎高级中学　215100　李　刚

【摘　要】　主题式学习有利于加深学生对知识的整体认识,实现对主线内容的整体建构.开放式问题有利于培养学生的创新意识与创新能力,具有多样性、主体性、探究性与可开发性等特点.如何在教学中利用开放式问题引导学生进行主题式学习,笔者在教学中通过尝试,给出了相关案例,并进行了一些思考,以期提高教学效率,提升学生数学素养.

【关键词】　开放式问题;主题式学习;高中数学

1　问题提出

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称《课标》)指出,命题时,应包括开放性问题和探究性问题,重点考查学生的思维过程、实践能力和创新意识.2020 年 1 月颁布的《中国高考评价体系》(以下简称《评价体系》)指出,高考试题应合理呈现情境,设置新颖的试题呈现方式和设问方式,促使学生主动思考,善于发现新问题、找到新规

* **基金项目**　江苏省教育科学“十四五”规划 2021 年度课题“基于深度学习的高中数学单元教学设计研究”(课题编号:C-c/2021/02/21).

律、得出新结论，考查学生敏锐发觉旧事物缺陷、捕捉新事物萌芽的能力，考查学生进行新颖的推测和设想并周密论证的能力，鼓励学生摆脱思维定势的束缚，勇于大胆尝试. 可见，教学与考试均提出对学生创新意识与创新能力的培养与考查. 同时，《课标》提出了主题式学习，通过整合教学内容，利用大概念的观点，构建主线或主题内容，达到学生对知识的整体性认识的目的. 在教学中，通过创设开放式问题，引导学生围绕主题进行深度探究，以期实现对知识的整体建构.

2　开放式问题的特征

开放式问题包含条件开放、结论开放或者条件与结论均开放，相比于传统数学问题确定的解答，开放式问题具有如下特点：

（1）多样性. 由于开放式问题的提出是不固定的，所以围绕某一核心概念展开讨论，条件的不同可以使得切入点是多样的，问题的不同可以使得答案是多样的.

（2）主体性. 学生是数学学习的主体. 通过创设开放式问题，给学生留出足够的思考空间并给予积极引导和恰当地组织合作学习，充分发挥其主体地位. 教师关注学生在课堂活动中的表现，使其有体验数学的机会.

（3）探究性. 通过情境材料设置的开放式问题应富有探究性，这样有利于学生从事观察、实验、猜想、验证、推理与交流等数学活动；同时，在内容与问题信息量上设置多方面的探究情境，促使学生积极、广泛地思考，取得较大的发展空间.

（4）可发展性. 在设计开放式问题时，要尊重学生的个体差异，促进其个性的可持续发展，在发展中逐步提高其关键能力与核心素养.

3　对构造开放式问题引导主题式学习的尝试

3.1　创设开放式情境，引导深度探究，促进主题学习

知识的产生和发展源于对问题的探究，问题的产生源于情境. 因此，在教学中，可以围绕某一主题创设合适的情境，通过开放式问题，引导学生进行深度探究.

案例 1　人教 A 版普通高中教科书数学必修第二册第 54 页有这样的一个问题：如图 1，为了测量两山顶 M,N 间的距离，飞机沿水平方向在 A,B 两点进行测量，A,B,M,N 在同一铅锤平面内. 请设计一个测量方案，包括：

（1）指出要测量的数据（用字母表示，并标示在图中）；

（2）用文字和公式写出计算 M,N 间的距离的步骤.

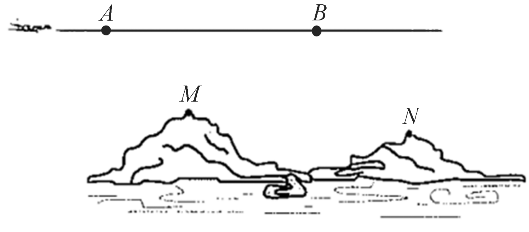

图 1

在现实生活中，存在很多的测量问题，其数学本质是解三角形. 在本案例中，需要根据要求测量所需数据，属于开放性情境问题. 围绕解三角形这一主题情境，需要测量哪些边长，哪些角度，要根据实际情境进行分析. 在解决这一测量问题时，可以将情境条件弱化，首先引导学生考虑如下两个情境.

情境 1　如图 2，若 A,B 之间有一座山，如何测量 AB 之间的距离？

分析　由于 A,B 之间不可视，所以需要在同一平面内选择一点 C，测量 AC,BC 之间的距离以及 $\angle ACB$ 的大小，利用余弦定理求出 AB 之间的距离.

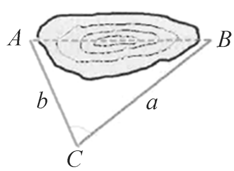

图 2

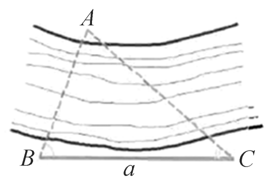

图 3

情境 2　如图 3，若 A,B 之间有一条河，如何测量 AB 之间的距离？

分析　由于 A,B 之间不可达，所以在其中一点的同侧选择另一点（不妨在点 B 同侧取一点 C），测量 BC 之间的距离，$\angle ACB$ 及 $\angle ABC$，利用内角和定理及正弦定理求出 AB 之间的距离.

以上情境都是通过构造一个三角形，在此三角形内结合情境正确选择正弦定理或者余弦定理. 将上述条件强化，可得情境 3.

情境 3　如图 4，若 A,B 在河的同侧，如何在对岸测量 AB 之间的距离？

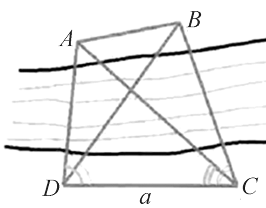

图 4

分析　可以在对岸选择两点 C,D，分别测量 CD 的距离，$\angle ACD$，$\angle BCD$，$\angle ADC$ 及 $\angle BDC$，分别在 $\triangle ACD$ 及 $\triangle BCD$ 中利用正弦定理求出 AC,BC 的距离，再在 $\triangle ABC$ 中

利用余弦定理求出 AB 之间的距离.

情境 3 即为案例 1 的解决策略.

围绕解三角形这一主题展开问题探讨,在复杂的情境中,学生要能够基于情境做正确分析,确定解决方案,测量需要的量.在此过程中,加深了学生根据条件合理选择正弦定理或余弦定理解三角形的认识,提升了学生提出问题、分析问题、解决问题的能力,提升了数学抽象、逻辑推理、数学建模等核心素养.

数学情境蕴含着相关的数学知识产生的背景和重要的数学思想方法,通过创设开放式的主题式的问题情境,围绕主题,引导学生进行问题探究,经历问题探究的过程,体会知识产生的背景,激发学生学习数学的兴趣,提升数学学习的能力.

3.2 根据问题灵活建立条件,凸显主体地位,引导主题学习

《课标》提出主题教学,围绕某一主题展开教学设计及教学实施. 可以说,在教学设计中,对教材内容的重构,对学习单元的设计提出了新要求.在主题教学观下,如何进行章末复习课教学设计及实施,凸显学生的主体地位,促进学生的深度学习,完善主题教学的理念,是我们需要研究的问题.在 2021 年江苏省高中数学青年教师评优课中,一个比赛课题是“直线与方程”的章末复习课.通过这次评优课活动,从中可以看到教师团队对主题式教学这一问题的思考与创新.

案例 2 已知点 $P(1,2)$,______(请添加一个条件),确定一条经过点 P 的直线 l,并求直线 l 的方程.

上述案例是选手们用的比较多的一个例题,结合《课标》对学生“四基”及“四能”的要求,联系《评价体系》对学生能力的考查要求,创设开放性问题,通过小组合作、同学互问等方式展开教学,围绕主题添加合适的条件,同时指导学生提出有价值的问题,将内容不断拓展引申,完善知识体系,实现主题式教学.

在教学过程中,归纳学生提出的条件,主要包含如下几种情况:

添加条件 1:直线 l 的斜率为 1(或者 l 的倾斜角为45°);

添加条件 2:直线 l 的斜率不存在;

添加条件 3:直线 l 过点 $Q(m,n)$(其中 m,n 是常数);

添加条件 4:直线 l 在两坐标轴上的截距相等(或互为相反数,或互为倒数).

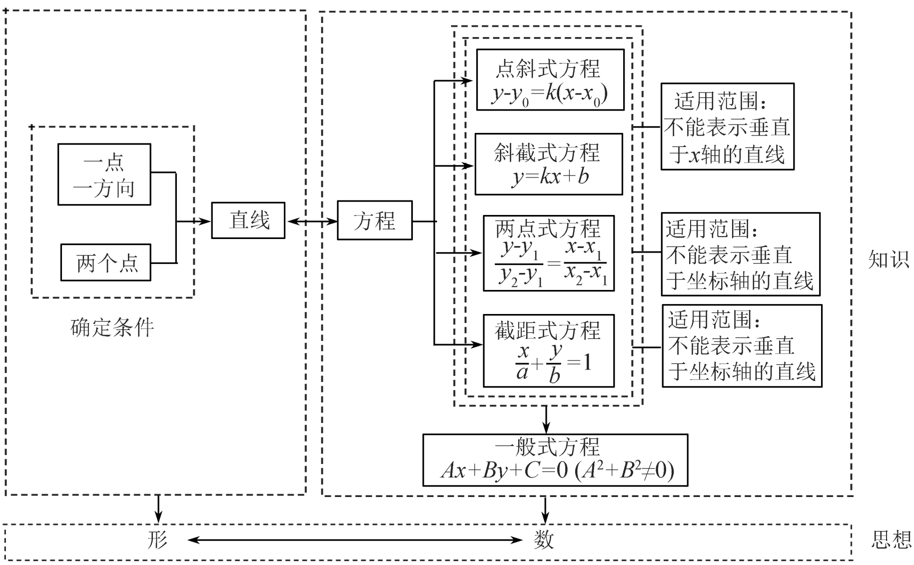

图 5

通过上述条件的建立,实现了学生对直线方程五种方程形式的建构,确认了相关方程的使用局限性.由此,引导完善直线方程知识结构图,如图 5,加深对直线方程形式的认识以及对每种形式适用范围的理解.

3.3 挖掘问题内涵,促进深度理解,推进主题学习

新高考中,出现了举例题,要求学生通过给出已知结论、性质和定理等条件,从题干中获取信息,整理信息,写出符合题干要求的结论或具体实例[1].这对学生深刻理解问题内涵,提升分析问题和解决问题能力,促进深度学习有重要的作用.另外,还可以促进学生养成对主题式知识建构的习惯.

案例3 (2021 · 新高考 Ⅱ 卷14) 写出一个具有性质 ①②③ 的函数 $f(x)=$______.

①$f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$；② 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；③$f'(x)$ 是奇函数.

本题考查的是学生对函数性质的充分理解，例举满足条件的函数，首先学生对基本初等函数以及函数的图象与性质要有本质的理解，满足条件 ① 的基本初等函数首先考虑幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$，再有条件 ②③ 可知函数为在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的偶函数，根据分析，答案可以是 $f(x)=x^2$，$f(x)=x^4$ 等等，其一般形式表示为 $f(x)=x^{\alpha}$（其中 α 取正偶数）. 由于答案不唯一，在教学中，教师要培养学生发散思维，发挥思考的空间，充分挖掘问题的内涵.

例如，还可以围绕 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$；

当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；

当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>1$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)+f'(x)>0$（或 $f(x)-f'(x)>0$）等条件，围绕构造函数的主题式研究，给学生多角度的思考与探索空间，构造符合条件的函数.

另外，通过对多变量 x_1,x_2 的研究，结合逻辑连接词“$\forall$”与“$\exists$”，还可以进行“$\forall x_1,x_2\in I,f(x_1)=g(x_2)$ 恒成立”“$\exists x_1,x_2\in I,f(x_1)=g(x_2)$ 成立”“$\forall x_1,x_2\in I,f(x_1)>g(x_2)$ 恒成立”等命题的设计，实现构造方法的融会贯通.

举例题的答案不唯一，给学生很大的发挥空间，不同的学生会有不同的答案，不同的答案又体现了学生不同的思维，思维的本质是要挖掘问题的内涵，要对一类知识或者方法有深刻的理解，构建相关主题，最后能实现灵活运用.

3.4 构建结构不良问题，实现自主建构，完善主题学习

教育部考试中心任子朝、赵轩在文[2]中概括了数学学科结构不良问题的5个主要特征：(1) 问题条件或数据部分缺失或冗余；(2) 问题目标界定不明确；(3) 具有多种解决方法；(4) 具有多种评价解决方法的标准；(5) 所涉及的概念、规则和原理等不确定. 可见，设计并运用结构不良问题，可以帮助学生辨析概念，构建知识体系，培养发现问题、提出问题、解决问题的能力，提升对解题方法优劣的评价意识，提高数学学习的兴趣.

案例4 （2020·新高考 Ⅰ 卷17）在 ①$ac=\sqrt{3}$，②$c\sin A=3$，③$c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在 $\triangle ABC$，它的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\dfrac{\pi}{6}$，______？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

上述案例条件和结论都是开放的，这就需要学生能够从问题已有的条件出发，结合对知识的认知和已有的经验，挖掘信息，关联知识，寻找方法.

通过问题条件的缺失，可以丰富考查的内容. 在教学中，组织学生选择条件进行补充，为学生提供多维度的思考空间，更好地拓展学生的思维宽度与广度，实现知识体系的自主建构. 在本案例中，涉及到解三角形的知识内容. 首先分析确定条件 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及 $C=\dfrac{\pi}{6}$，利用正弦定理及余弦定理可得 $a=\sqrt{3}b$ 及 $a=\sqrt{3}c$，进而有 $b=c$.

若选择条件 ①，结合 $a=\sqrt{3}c$，可求得 $c=1$.

若选择条件 ②，角度1：考虑到 $b=c$，所以有 $B=C=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由 $c\sin A=3$ 得 $c=2\sqrt{3}$. 角度2：考虑到 a,b,c 关系已经建立，所以不妨设 $a=\sqrt{3}m\ (m>0)$，则 $b=c=m$，由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{m^2+m^2-3m^2}{2m^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由 $c\sin A=3$ 得 $c=2\sqrt{3}$.

若选择条件 ③，显然与已知条件建立的 $b=c$ 这一结果矛盾，于是满足条件 ③ 的三角形不存在.

围绕解三角形这一主题，通过结构不良问题，从多个角度分析，考虑对应可能，寻找不同路径，实现知识的整体建构. 为了提升学生对知识的深刻理解，完善认知体系，还可以对问题条件做如下变式拓展.

变式1 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\dfrac{2}{3}c=a\cos B-b\cos A$，求 $\dfrac{\tan A}{\tan B}$ 的值.

分析 由 $\dfrac{2}{3}c=a\cos B-b\cos A$ 及正弦定理得 $\dfrac{2}{3}\sin C=\sin A\cos B-\sin B\cos A$，所以 $\dfrac{2}{3}\sin(A+B)=\sin A\cos B-\sin B\cos A$，从而得 $\dfrac{\tan A}{\tan B}=5$.

本题实现了弦与切的转化.

变式2 在锐角 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=6\cos C$,求 $\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}$ 的值.

分析 本题是2010年江苏高考第13题,具有很好的区分度.主要过程如下:利用余弦定理,$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=6\cos C$ 可化为 $a^2+b^2=\frac{3}{2}c^2$,于是 $\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}=\frac{\sin C}{\cos C}\left(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}\right)=\frac{1}{\cos C}\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}=\frac{c^2}{ab\cos C}=\frac{c^2}{\frac{1}{6}(a^2+b^2)}=4$.在解三角形中,能够实施"边角互化"与"弦切互化"的关键因素是条件中要有齐次式,上述过程就实现了齐次式的作用.

通过上述两个变式,将案例内容作了进一步的拓展探究.围绕解三角形这一主题,实现边与角,弦与切之间的相互转化.在教学中,可以通过改变条件或者结论,实现多元的发展,特别的,该系列题的求解内容丰富,考查了正余弦定理、三角形内角和、诱导公式、同角三角函数关系式、两角和与差的正余弦公式以及平面向量数量积等知识,入手宽,起点低,既可以利用正余弦定理进行边角互化解决问题,又可以从平面向量入手,实现了多个知识点的综合考查,达到了数学学习高效学习的效果[3].综合案例1及案例4,可以给出如图6所示的结构关系图.

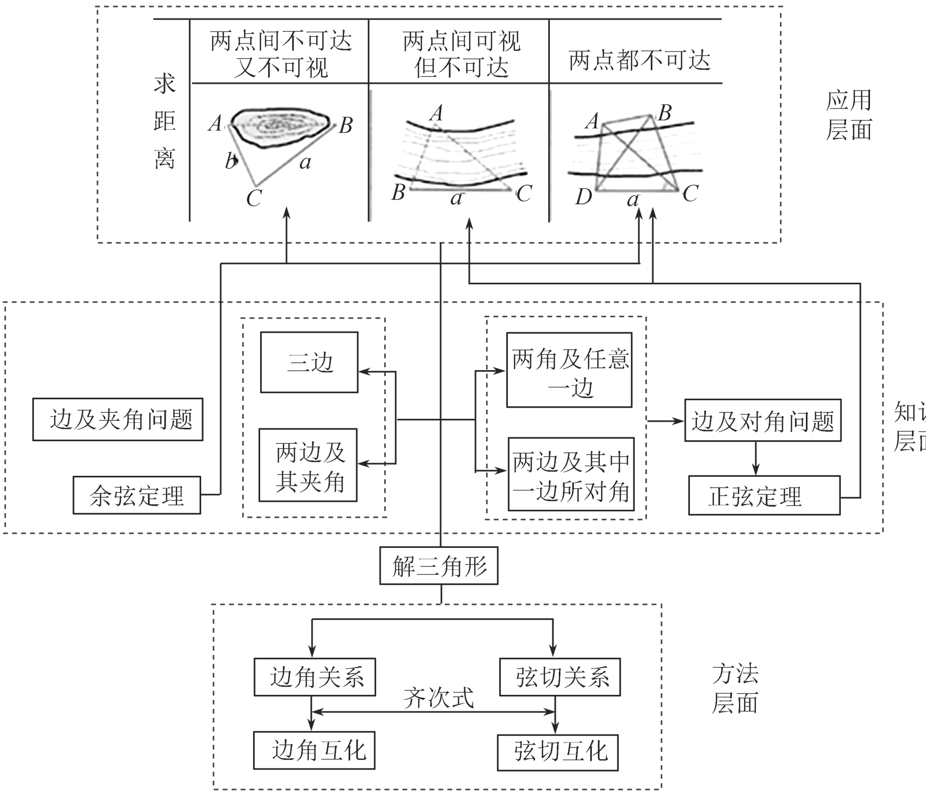

图6

4 对构造开放式问题引导主题式学习的思考

4.1 教师要有利用开放式问题引导学生主题式学习的意识

《评价体系》指出了情境化命题,以此来承载考查内容,达到考查目的.要培养与提高学生解决情境化问题的能力,需要教师注重在教学中创设问题情境,引导学生主动探究学习,促进深度学习.现在的教学中,讲授式教学和接受式学习仍然是教学的主要方式,对学生数学主题式学习能力与意识的培养是持续性的过程,需要教师改变观念,需要学生学会学习,开放式问题有利于发展学生的发散思维,有利于学生独立思考、自主探索,有利于培养学生围绕情境问题进行深度探究的意识,有利于学生主动建构知识体系,完善知识认知.

4.2 教师要梳理清主题式内容体系,增强教学的阶段性、整体性与相关性

高中数学课程内容由函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动四条主线构成,这样设置内容,更好地体现了知识的阶段性、整体性和关联性.作为教师,要能够认识结构变化,熟悉教

材内容设置,注重数学逻辑体系,完成从以往按照“知识领域 — 知识单元 — 知识点”展开教学到现在按照“主线 — 主题 — 核心内容”呈现内容,开展教学的完美转化.例如,在函数的单调性教学中,可以围绕其为主题,串联函数单调性的概念,基本初等函数的单调性,数列的单调性,利用导数研究函数的单调性等知识,这些内容的呈现是存在阶段性的,教师要在教学中能够通过设置情境,在不同阶段,合理串联起它们的关系,从整体观角度认识它们之间的关联.

4.3 让学生体验生成大概念体系,养成自主创新的思维习惯

大概念是指在某一学科中居于重要地位,对学科其他内容更具统摄力、关联性的概念.学生对知识的掌握是离散型的,要培养学生在学习的过程中串联知识,建构体系,需要教师围绕最重要、最核心的内容设置合理的问题情境.例如,通过设置开放式的问题,启发学生思考,引发学生展开联想,领悟知识之间的内在逻辑和思想方法.这样,学生应该更能体会知识的本质特点,围绕核心概念扩展知识体系.以此循序渐进地学习,逐步建立自主建构概念体系的能力,养成自主创新的思维习惯.

总之,在教学中,通过设计开放式问题,帮助学生多角度思考,有利于促进学生交流合作,培养思维的系统性、灵活性、创造性,加深对知识的整体认识,实现对主线内容的整体建构.

参考文献

[1] 任子朝等.高考数学新题型测试研究[J].数学教育学报,2015(02):21-25.

[2] 任子朝,赵轩.数学考试中的结构不良问题研究[J].数学通报,2020(02):1-3.

[3] 李刚.基于课本,提高命题的针对性和有效性[J].数学通讯,2017(02):43-47.

作者简介 李刚(1983—),男,江苏苏州人,中学高级教师;曾获江苏省高中数学优质课评比一等奖;研究方向:中学数学教育.

新高考背景下基于深度学习的“问思”型复习课模式探究

——以圆锥曲线中定点定值为例

江苏省常州市正行中学 213000 刘天程

江苏省常州市北郊高级中学 213000 程守山

【摘 要】 随着新高考改革的不断推进,尤其是八省联考以及新高考中的数学试题对学生能力的要求更为突出,对学生学习方式,教师的教学教法提出了新的考验.本文以圆锥曲线中常见的定点定值问题为课例,基于深度学习探索“问思型”复习课模式.

【关键词】 新高考;高三数学;深度学习;问思型;解析几何;定点定值

所谓深度学习是指教师借助一定的活动情景带领学生超越表层的知识符号学习,进入知识内在的逻辑形式和意义领域,挖掘知识内涵的丰富价值,完整地实现知识教学对学生的发展价值.实现这些目标需要展开确实有效的学生活动.而“问思”型教学是深度学习的有效方式,教师通过问题,提问、追问达到学生产生疑问,思考、思索、深思进入深度学习,提高思维能力.2020 年作为新高考改革的第一年,备受全国师生关注,其中全国 Ⅰ 卷和山东卷(新高考试行省)中的解析几何大题对争取双一流学校的学生来说起到至关重要的作用.而这两题都是涉及解析几何中定点定值问题,属于高频题.本文以此问题展开,引导学生深度学习,探索“问思”型深度学习复习课模式.

1 课例分析

1.1 确定复习课题(微专题)

1.1.1 数据支持,统计错误率

笔者通过比较 2020 年山东省高考数学最后一题均分 1.02 分以及常州市 2021 年期初最后一题解析几何均分 1.3 分,发现这类定点定值问题得分率