吗？请大家仔细研究，尝试还有什么发现？

生1：我发现 $D=G\cup H$，也就是“事件 G 与 H 至少有一个发生就是 D 发生”。

师：我们称 D 是 G 与 H 的并，也称 D 是 G 与 H 的和，并记作 $D=G+H$.

生2：我发现 $G=A\cap D$，也就是“事件 A 与 D 同时发生就是 G 发生”。

师：我们称 G 是 A 与 D 的交，也称 G 是 A 与 D 的积，并记作 $G=AD$.

设计意图 事件的关系和运算是集合语言刻画随机事件的后续生成.针对样本点、样本空间、随机事件及其关系，引导学生类比迁移，通过集合的“子”“交”“并”，自行研究事件的关系与运算.如此设计，学生一方面厘清知识间的联系，更重要的是学会了提出问题，探索研究问题的路径.

2.4 串珠成线，形成完整知识链条

问题7：同学们，今天我们一起走进了概率世界，在这里我们更加深刻地认识了随机现象，并完成了随机现象数学化这一抽象生成，你能用导图的形式概括回顾今天的学习吗？

设计意图 围绕随机事件这一核心概念的生成，引导学生高处站位，以整体目光审视本课时内容，拨冗去繁，抽出主线，如此设计可以更好地促进学生自主审视学习内容，梳理研究路径，为后续学习奠定基础.

参考文献

[1] 张灵，徐章韬.微言要义之随机现象与随机事件[J].数学通报，2017，56(09)：15-17.

[2] 程海奎，章建跃.用样本空间刻画随机现象定义随机事件的概率发展学生的随机观念[J].数学通报，2021，60(05)：1-9.

[3] 邱瑶.“样本点、样本空间和随机事件的表达”教学设计[J].中国数学教育，2021(08)：50-54.

作者简介 孔繁晶(1984—)，女，江苏徐州人，讲师；曾获市级优质课一等奖，教师基本功比赛一等奖；研究方向为中学数学教育与研究；10余篇论文发表，其中1篇论文被人大复印报刊资料《高中数学教与学》全文转载.

例谈含参数的函数不等式恒成立求参数范围问题几种解题策略*

甘肃省永昌县第一高级中学 737200 吴水萍 赵忠平

【摘 要】 含参数的函数不等式恒成立求参数范围问题是近年来高考的重点和热点问题，思维难度高，学生得分率低，本文试图全面总结此类题型的解题方向和方法，帮助考生有针对性突破解决此类问题的卡点，提高学生分析和解决函数综合问题的能力，促进学生数学学科核心素养的达成.

【关键词】 函数不等式；恒成立；参数范围；解题策略

近年来，全国高考试题及高考模拟试题中出现了颇有新意、构思精巧的函数不等式恒成立求参数范围的综合题，这类题涉及知识面广、综合性强，对能力要求较高，能较好地考查学生的思维能力，很值得重视和探究.下面举例说明此类问题的几种解题策略，供参考.

1 特值探路

例1 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

(1) 当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；(2) 若 $f(x)\geq 1$，求 a 的取值范围.

分析 特殊值是函数的重要节点，特殊值往往显得简单、直观、具体，通过特殊值容易探索出所求参数的具体范围，得到问题的必要条件，再进一步证明其充分性，问题就可以得到完美解答.

解 (1) 略；(2) 将 x 取特殊值1代入不等式中，不等式应该成立，即 $f(1)\geq 1$，也即 $a+\ln a\geq 1$，令 $g(a)=a+\ln a-1$.易知函数 $g(a)$ 单调递增，$g(1)$

* **基金项目** 2020年度甘肃省“十三五”教育科学规划课题“优化教学环节，构建三段六环‘一模多型’高效数学课堂导学模式的实践研究”(GS[2020]GHB1964).

$=0$,所以 $a \geqslant 1$.下面证明充分性,当 $a \geqslant 1$ 时,$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a \geqslant e^{x-1}-\ln x \geqslant x-\ln x$.令 $h(x)=x-\ln x$,则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.当 $x \in(0,1)$ 时,$h'(x)<0$;当 $x \in(1,+\infty)$ 时,$h'(x)>0$,故 $h(x) \geqslant h(1)=1$.所以 a 的范围是 $[1,+\infty)$.

点评　利用特殊值探路可以迅速化解题目难度,快速找到题目的答案(准答案),减轻解题思想压力,转换解题思维角度,补全充分性证明过程即可完美收官.一般对数函数可将真数取特值 1,指数函数的指数可取特值 0.

2　分类筛选

例 2　设函数 $f(x)=ax+\cos x, x \in[0,\pi]$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $f(x) \leqslant 1+\sin x$,求 a 的取值范围.

分析　当问题所给的对象不能统一研究时,就要将研究对象按照相同点和不同点,按照某一标准分成不同种类逐一进行研究,最后综合得解,即先对明显成立的部分进行证明,再对不成立的部分举反例,说明不恒成立,从而筛选出所求参数的范围.

解　(1) 略;(2) 由 $f(x) \leqslant 1+\sin x$ 得 $f(\pi) \leqslant 1$, $a\pi-1 \leqslant 1$,所以 $a \leqslant \frac{2}{\pi}$.令 $g(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$,则 $g'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$.

当 $x \in\left(0, \arccos \frac{2}{\pi}\right)$ 时,$g'(x)>0$,当 $x \in\left(\arccos \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时,$g'(x)<0$.又 $g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,所以 $g(x) \geqslant 0$,即 $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

当 $a \leqslant \frac{2}{\pi}$ 时,有 $f(x) \leqslant \frac{2}{\pi}x+\cos x$.

(ⅰ) 当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时,$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x, \cos x \leqslant 1$,所以 $f(x) \leqslant 1+\sin x$;(ⅱ) 当 $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ 时,$f(x) \leqslant \frac{2}{\pi}x+\cos x=1+\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \leqslant 1+\sin x$.综上,$a$ 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{2}{\pi}\right]$.

点评　含参数函数不等式恒成立求参数范围问题可以利用逐段筛选讨论法求解,对参数按照重要节点进行分类,在每一类中证明不等式成立或举反例说明不成立,最后得解,体现了化整为零的思想和归类整理的思想.

3　分离参数

例 3　同例 2(2).

分析　含参数函数不等式恒成立求参数范围问题如果参数和变量容易分离,则可以先分离参数,将不等式恒成立问题转化为最值(或上、下界)问题求解,从而只需构造函数求最值即可.

解　$f(x) \leqslant 1+\sin x$ 即 $ax+\cos x \leqslant 1+\sin x(*)$,当 $x=0$ 时,对 $a \in \mathbf{R}$ 不等式 $(*)$ 恒成立;当 $0<x \leqslant \pi$ 时,不等式 $(*)$ 可化为 $a \leqslant \frac{1+\sin x-\cos x}{x}$.构造函数 $g(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{x}$,则 $g'(x)=\frac{(\sin x+\cos x)x-(1+\sin x-\cos x)}{x^2}$,构造函数 $h(x)=(\sin x+\cos x)x-(1+\sin x-\cos x)$,则 $h'(x)=(\cos x-\sin x)x$.当 $0<x \leqslant \frac{\pi}{4}$ 时,$h'(x) \geqslant 0$,当 $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$ 时,$h'(x) \leqslant 0$,故 $h(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上递增,在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ 上递减,又因为 $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-1>0, h(\pi)=-\pi-2<0$,所以存在 $x_0 \in\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$,使得 $h(x_0)=0$.故当 $x \in(0, x_0]$ 时,$h(x) \geqslant 0$,当 $x \in[x_0, \pi]$ 时,$h(x) \leqslant 0$,故当 $x \in(0, x_0]$ 时,$g'(x) \geqslant 0$,当 $x \in[x_0, \pi]$ 时,$g'(x) \leqslant 0$,即 $g(x)$ 在 $(0, x_0]$ 上单调递增,在 $[x_0, \pi]$ 上单调递减.

又因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(1+\sin x-\cos x)'}{x'}=1$, $g(\pi)=\frac{2}{\pi}$,因为 $1>\frac{2}{\pi}$,故当 $x=\pi$ 时,$g(x)_{\min}=\frac{2}{\pi}$,要使不等式 $a \leqslant \frac{1+\sin x-\cos x}{x}$ 在 $x \in(0,\pi]$ 上恒成立,只需 $a \leqslant \frac{2}{\pi}$.综上 a 的范围是 $\left(-\infty, \frac{2}{\pi}\right]$.

点评　不等式恒成立求参数范围问题,只要容易实现参变分离,就可以很容易转化为最值(或上、下界)问题求解,但在求最值(或上、下界)时常常要用到洛必达法则.

4　构造函数

例 4　同例 1(2).

分析　根据解析式的特点,将不等式两边凑成

一致的形式,运用函数与方程的思想实现问题的转化,构造新函数,利用新函数的单调性,将函数值的大小比较转化为自变量大小的比较.

解　$f(x)\geqslant 1$ 等价于 $ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1\geqslant 0$,即 $e^{\ln a+x-1}+\ln a-1\geqslant \ln x$,两边同时加 x,得 $e^{\ln a+x-1}+\ln a-1+x\geqslant \ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$.令 $F(t)=e^t+t$,显然 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则不等式等价于 $F(\ln a+x-1)\geqslant F(\ln x)$,等价于 $\ln a+x-1\geqslant \ln x$,即 $\ln a\geqslant \ln x-x+1$.令 $g(x)=\ln x-x+1$,则 $g'(x)=\frac{1-x}{x}$.当 $x\in(0,1)$ 时,$g(x)$ 单调递增,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g(x)$ 单调递减.故 $g(x)_{\max}=g(1)=0$,所以 $\ln a\geqslant 0$,解得 $a\geqslant 1$.

点评　在含参数函数不等式恒成立求参数范围问题中,将不等式两边转化成同构式,根据同构式构造新函数,利用新函数单调性进一步转化问题,使得问题得到降维求解,此法虽然有一定难度,但能够发现命题人的命题路径及数学问题的本质.

5　虚设零点

例 5　同例 1(2).

分析　设而不求是解析几何处理问题基本思想,在含参数的函数不等式恒成立求参数范围时,当导函数的零点确实存在,但求不出来时,就可以虚设零点.利用整体代换思想促成问题解决.

解　$f(x)\geqslant 1$ 的必要条件是 $f(1)\geqslant 1$,即 $a+\ln a\geqslant 1$,也即 $g(a)=a+\ln a-1\geqslant 0$.易知 $g(a)$ 单调递增,$g(1)=0$,所以 $a\geqslant 1$.$f(x)\geqslant 1$,即 $ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1\geqslant 0$.令 $g(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1$,则 $g'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$,显然 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $g'(1)=a-1>0$,$g'\left(\frac{1}{a}\right)=ae^{\frac{1}{a}-1}-a=a(e^{\frac{1}{a}-1}-1)<0$,故 $\exists x_0\in\left(\frac{1}{a},1\right)$,使得 $g'(x_0)=0$,即 $ae^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$.所以函数 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.故 $g(x)_{\min}=g(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a-1=\frac{1}{x_0}-\ln x_0+\ln a-1=\frac{1}{x_0}+\ln\frac{1}{x_0}+\ln a-1$.因为 $x+\ln x-1\geqslant 0$,$\ln a\geqslant 0$,所以 $g(x)\geqslant 0$.即当 $a\geqslant 1$ 时,$f(x)\geqslant 1$.所以 a 的范围是 $[1,+\infty)$.

点评　虚设零点体现设而不求思想,是解决导数问题常用方法,当导数的零点存在但不易求出的时候,就可以虚设零点,回代到原函数解析式中求值,确定函数值的符号.

6　数形结合

例 6　同例 2(2).

分析　将原不等式适当变形得到 $g(x)\leqslant h(x)$ 恒成立形式,借助导数的工具,分别研究两个函数的性质,再分别画出两函数图象,根据图象能直观得到参数范围.

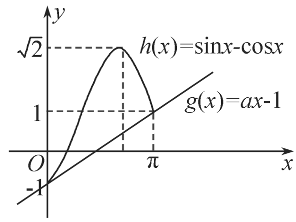

图 1

解　$f(x)\leqslant 1+\sin x$ 即 $ax+\cos x\leqslant 1+\sin x$,可化为 $ax-1\leqslant \sin x-\cos x$,构造函 $g(x)=ax-1$,$h(x)=\sin x-\cos x$,$x\in[0,\pi]$,画出函数 $g(x)$、$h(x)$ 图象如图 1,$g(x)$ 图象是过 $(0,-1)$ 点的直线,$h(x)$ 的图象也过 $(0,-1)$ 点,在 $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ 上为增函数,在 $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 上为减函数,要使 $ax-1\leqslant \sin x-\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立,只需 $x\in[0,\pi]$ 时 $g(x)$ 图象在 $h(x)$ 图象下方,由图象知 $a\leqslant\frac{2}{\pi}$ 时不等式恒成立,即 a 的范围是 $\left(-\infty,\frac{2}{\pi}\right]$.

点评　数学是研究数量关系和空间形式的科学,“数”让“形”更精确,“形”让“数”更直观,二者“比翼双飞”,共同促进数学发展[1].本解法通过挖掘数学式子背后形的特征,以形助数,是解决数学问题的常用方法.

参考文献

[1]　徐进通.开发数学应用素材的路径探究[J].中学数学杂志,2021(10):22-28.

作者简介　吴水萍(1976—),女,甘肃武威人,中学一级教师;主要从事中学数学教学研究工作;主持和参与省级课题多项,发表论文 20 多篇.

赵忠平(1972—),男,甘肃庆阳人,中学高级教师;主要从事中学数学教学研究工作;发表论文 40 多篇.