寻找命题背景　提高复习效率
——从立体几何的备考说起

山东省临沂第四中学　276000　梁乾培

【摘　要】 数学学习就是要追求清楚、自然,数学解题要把握本质,直击要害.数学解题的过程就是在合乎逻辑的前提下,将未知问题转化为已经解决过的题目.而在解决立体几何综合问题时,通过寻找题目图形的背景,找到图形的“源”,就可以快速解决问题.

【关键词】 立体几何;图形;本质;核心素养

1　立体几何在高考中的重要性

《普通高中数学课程标准(2017版)》(以下简称“课标2017版”)[1] 要求高中数学教学以发展学生的数学学科的核心素养为导向,创设合适的教学情境,启迪思维,引导学生把握数学内容的实质.高考考查的内容是“必备知识、关键能力、学科素养、核心价值”.立体几何作为高中数学的重要内容,在高考中是必考题型(通常是2道选择或填空题和1道解答题),是考查学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的载体.

2　立体几何高三复习的现状

姜伯驹院士曾指出:“平面几何之所以招人恨,在于它能够透视出思维的品质,靠死记硬背不容易过关,平面几何对教师的要求也高,如果学生感受的尽是刻板的清规戒律而缺少甘甜的柳暗花明,就不会赢得学生的喜爱.”[2] 我想,姜院士描述的情形对于高中立体几何的学习现状同样成立.大多立体几何的复习往往是题海战术,不重视基本概念、定理,复习点到为止,涉及到有关空间角的问题只强调建立空间直角坐标系计算,解题过程一带而过,不重视空间想象能力的培养,不站在命题人的角度探索,不研究题目的来源,不去找该题的“母题”.本文寻找通过近几年高考题中典型例题的分析,寻找题目的“根源”,探讨立体几何复习中如何培养学生的空间想象力和逻辑推理能力,避免低效的“题海战术”.

3　挖掘图形背景的立体几何复习

数学是思维的科学,思维能力是数学能力的核心,在立体几何的复习中,应该通过典型的题目教会学生思考.波利亚说过:“一个专心的认真备课的老师能够拿出一个有意义的但又不太复杂的题目,去帮助学生发掘问题的各个方面,使得通过这道题,就好像通过一道门户,把学生引入了一个完整的理论领域.”[3] 因此,本文以找立体图形的“源”,结合具体的高考试题去领会命题立意,挖掘试题的育人功能,帮助学生体会命题的依据、思路、方法.从而,找到解题的“切入点”,提高立体几何复习的效率.

3.1　嵌入三棱柱

教材中求三棱锥体积的方法是把三棱柱分解为三个等体积的三棱锥,所以解题时我们可以把三棱锥的问题补成三棱柱,当解题面对的图形为三棱锥时,特别是有一个面与底面垂直或一条棱与底面垂直时,此类问题的图形背景往往是柱体,通常我们可以把该图形补成直三棱柱,把三棱锥嵌入三棱柱中,把握命题的出发点,直指问题本质.

例1　(2021年高考数学全国卷新高考Ⅰ卷第20题)如图1,在三棱锥A-BCD中,平面$ABD\perp$平面BCD,$AB=AD$,O为BD的中点.

(Ⅰ)证明:$OA\perp CD$;

(Ⅱ)若$\triangle OCD$是边长为1的等边三角形,点E在棱AD上,$DE=2EA$,且二面角E-BC-D的大小为45°,求三棱锥A-BCD的体积.

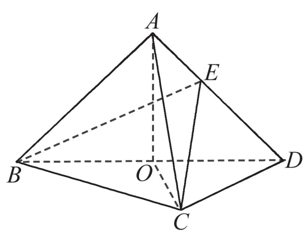

图1

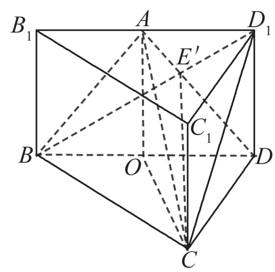

图2

分析　(Ⅰ)在三棱锥A-BCD中,平面$ABD\perp$平面BCD,可以理解为命题人以直三棱柱BCD-$B_1C_1D_1$为依托,如图2,取B_1D_1的中点A,连接AB,AC,AD得到,显然,AO与侧棱平行,则$AO\perp$平面BCD.不难有下面的证明:

$AB=AD$,O为BD的中点,所以$AO\perp BD$,因为平面$ABD\cap$平面$BCD=BD$,平面$ABD\perp$平面BCD,$AO\subset$平

面 ABD,因此 $AO \perp$ 平面 BCD,因为 $CD \subset$ 平面 BCD,所以 $AO \perp CD$.

(Ⅱ)连接 BD_1,设 $AD \cap BD_1 = E'$,且 $\frac{AE'}{E'D} = \frac{AD_1}{BD} = \frac{1}{2}$,又因为 $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{2}$,所以,$E'$ 与 E 重合,则平面 EBC 与平面 D_1BC 重合,所以二面角 $E\text{-}BC\text{-}D$ 与二面角 $D_1\text{-}BC\text{-}D$ 相等,在直三棱柱中,易知 $\angle D_1CD$ 是二面角 $D_1\text{-}BC\text{-}D$ 的平面角,故 $\angle D_1CD = \frac{\pi}{4}$,又 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形,所以,$CD = DD_1 = AO = 1$.所以 $V = \frac{1}{3}AO \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

方法点睛 把三棱锥嵌入三棱柱中,垂直关系更加直观,二面角变得显然,并且运算量降低,甚至连出错的机会都没有.因此,如果我们能够理解命题立意可以使解题事半功倍,激发学习兴趣,体会成功的快乐,提高发现问题和解决问题的能力.如果我们补成三棱柱后,因为底面是直角三角形,建立空间直角坐标系,解决(Ⅱ)也是非常方便的.

3.2 嵌入正(长)方体

“课标 2017 年版”明确要求“立体几何初步”的学习,可以以长方体为载体,帮助学生认识和理解空间点、线、面的位置关系.表述平行、垂直的性质与判定时,大多也是从长方体开始的.当题目给出的图形是四棱锥,其中有一条棱与底面垂直或一个面与底面垂直时,或者是有一个共顶点的三条侧棱两两垂直时,我们通常把它补成正(长)方体.此时,我们不管是用传统方法直接证明,还是建立空间直角坐标系,题目都变得直观、简单,有章可循.

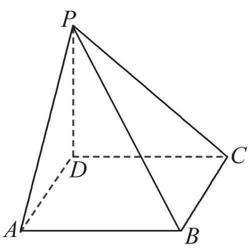

图 3

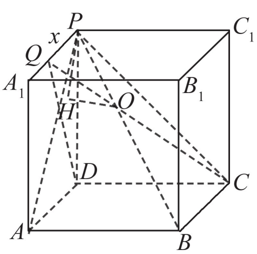

图 4

例 2 (2020 年高考数学山东卷第 20 题)如图 3,四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面为正方形,$PD \perp$ 底面 $ABCD$.设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

(Ⅰ)证明:$l \perp$ 平面 PDC;

(Ⅱ)已知 $PD = AD = 1$,Q 为 l 上的点,求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.

分析 (Ⅰ)把四棱锥补成长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1P$,(如图 4)易知,平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l 即为棱 A_1P,证明 $l \perp$ 平面 PDC,就等价于证明 $A_1P \perp$ 平面 C_1CDP.即证明 $AD \perp$ 平面 PDC,这样的证明非常简单了.

(Ⅱ)设 $PB \cap QC = O$,过点 P 作 $PH \perp$ 平面 QCD,垂足为 H,连接 PH,则 $\angle POH$ 为 PB 与平面 QCD 所成角.设 $QP = x$,$PO = y$,则 $V_{P-QCD} = V_{C-PQD}$,即 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{1^2 + x^2} \times PH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times x \times 1$,即 $PH = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$,因为 $\triangle POQ \backsim \triangle BOC$,则 $\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{3} - y}$,解得 $y = \frac{\sqrt{3}x}{1 + x}$,在 $\mathrm{Rt}\triangle POH$ 中,$\sin\angle POH = \frac{PH}{PO} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{\frac{\sqrt{3}x}{1 + x}} = \frac{1 + x}{\sqrt{3}\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{1 + 2x + x^2}{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1 + \frac{2x}{1 + x^2}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1 + 1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.当且仅当 $x = 1$ 时取等号.所以直线 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

方法点睛 当年,该高考题的得分率不高,主要原因是考生找不到交线,很明显,命题的背景是正方体,如果把图形补成正方体后,该问题就非常清楚、简单.对第(Ⅱ)问的解答,我们依然是利用正方体的特殊性,设出面的垂线,找到直线与平面所成的角,利用等体积求出垂线段和斜边的长度,在直角三角形中,得到线面角正弦的表达式,利用基本不等式求出最大值.与建立空间直角坐标系相比较运算量降低.

例 3 (2016 年高考数学全国卷 Ⅰ 文科第 18 题)如图 5,已知正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的侧面都是直角三角形,$PA = 6$,顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D,D 在平面 PAB 内的正投影为点 E,连结 PE 并延长交 AB 于点 G.

(Ⅰ)证明:G 是 AB 的中点;

(Ⅱ)在图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F(说明作法及理由),并求四面体 $P\text{-}DEF$ 的体积.

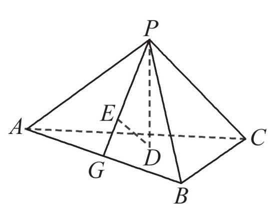

图 5

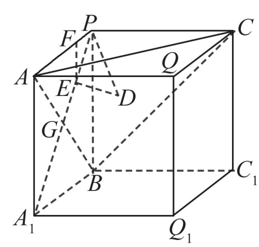

图 6

分析 (Ⅰ)略.

(Ⅱ)因为正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的侧面是直角三角形,故可以将三棱锥补成正方体 $PAQC\text{-}BA_1Q_1C_1$,如图 6,过

点 E 作 PB 的平行线交 PA 于点 F,F 即为 E 在平面 PAC 内的正投影.理由如下:因为 $EF // PB$,$PB \perp$ 平面 PAC,所以 $EF \perp$ 平面 PAC.

即点 F 为 E 在平面 PAC 内的正投影.连结 CG,因为 P 在平面 ABC 内的正投影为 D,所以 D 是正三角形 ABC 的中心.由(Ⅰ)知,G 是 AB 的中点,所以 D 在 CG 上,故 $CD=\frac{2}{3}CG$,$DE // PC$,因此 $PE=\frac{2}{3}PG$,$DE=\frac{1}{3}PC$.由已知,正三棱锥的侧面是直角三角形且 $PA=6$,可得 $DE=2$,$PE=2\sqrt{2}$,$EF=PF=2$,所以四面体 $P\text{-}DEF$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\frac{4}{3}$.

方法点睛　正方体是我们学习立体几何的重要载体,因此,我们说"正方体是立体几何的百宝箱".在高三复习时,曾经让学生解答该题,做对的很少,当补成正方体后,学生豁然开朗,把给出的图形补成正方体后,找点 E 在平面 PAC 内的正投影就变得很简单,此时的问题化归就有方向,问题往往变得比较直观,解题就心中有数,心中有底.

3.3　聚焦图形的核心

立体几何图形往往比较复杂,如果抓不住核心部分,就会眼花缭乱、无从下手,在解题时,要善于从已知和待证明的结论出发抓主要矛盾,找到解题的突破口,在图形的核心中寻求突破.

例 3　(2020 年高考数学全国卷Ⅰ理第 18 题)如图 7,D 为圆锥的顶点,O 是圆锥底面的圆心,AE 为底面直径,$AE=AD$.$\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形,P 为 DO 上一点,$PO=\frac{\sqrt{6}}{6}DO$.

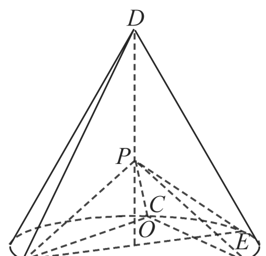

图 7

(Ⅰ)证明:$PA\perp$ 平面 PBC;

(Ⅱ)求二面角 $B\text{-}PC\text{-}E$ 的余弦值.

分析　(Ⅰ)题目给出的图形复杂,但是,要证明 $PA\perp$ 平面 PBC 是清楚的,所以,要抓住核心图形,即三棱锥 $A\text{-}PBC$(如图 8),只需要证明 $PA\perp PB$,$PA\perp PC$ 即可.因为已知条件更多地是边长,故考虑利用勾股定理的逆定理,由题设知 $\triangle DAE$ 为等边三角形,设 $AE=1$,则 $DO=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$CO=BO=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}$,所以 $PO=\frac{\sqrt{6}}{6}DO=\frac{\sqrt{2}}{4}$,$PC=\sqrt{PO^2+OC^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$,同理 $PB=PA=\frac{\sqrt{6}}{4}$,又 $\triangle ABC$ 为等边三角形,则 $\frac{BA}{\sin 60^\circ}=2OA$,所以 $BA=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$PA^2+PB^2=\frac{3}{4}=AB^2$,则 $\angle APB=90^\circ$,所以 $PA\perp PB$,同理 $PA\perp PC$,又 $PC\cap PB=P$,所以 $PA\perp$ 平面 PBC.

(Ⅱ)略.

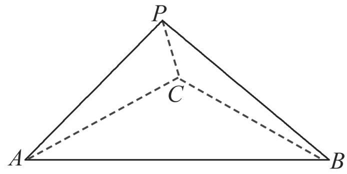

图 8

方法点睛　从要证明的结论出发寻找解题思路是立体几何证明的重要手段,立体几何解题遵循"由已知想性质,由求证想判定".因为要证明线面垂直,就要证明线线垂直,证明 $PA\perp$ 平面 PBC,则在三棱锥 $A\text{-}PBC$ 中证明侧棱垂直成为研究的核心.

3.4　补成完整的几何体

当题目给出的图形不能直接判断是什么样的几何体,往往是命题人通过截取几何体的一部分呈现出来,考查空间想象能力.为了解题时抓住本质,使问题的解决有依托,可以把它补充完整,使它成为我们常见的几何体.

例 4　(2019 年高考数学全国卷Ⅲ第 8 题)如图 9,点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心,$\triangle ECD$ 为正三角形,平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$,M 是线段 ED 的中点,则(　　).

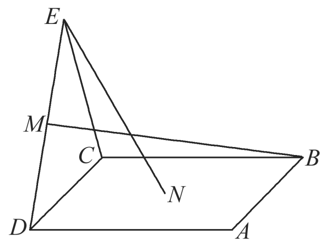

图 9

A.$BM=EN$,且直线 BM,EN 是相交直线

B.$BM\neq EN$,且直线 BM,EN 是相交直线

C.$BM=EN$,且直线 BM,EN 是异面直线

D.$BM\neq EN$,且直线 BM,EN 是异面直线

分析　把图形补成完整的三棱柱 $DCE\text{-}ABF$,连接 BE,BD,MN,因为点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心,M 为 DE 中点,所以 MN 是 $\triangle DBE$ 的中位线,所以 BM,EN 是相交直线,设正方形边长为 2,在三棱柱中,易知三角形 BDE 是等腰三角形,且 $BD=BE=2\sqrt{2}$,$DE=2$,易得 $BM=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$,作 $EO\perp CD$ 于 O,连接 ON,则 $\triangle EON$ 为直角三角形,易知 $EO=\sqrt{3}$,$ON=1$,所以 $EN=2$,所以 $BM\neq EN$.

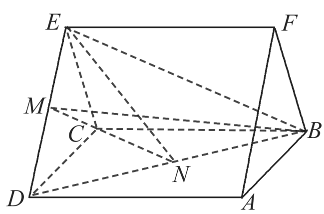

图 10

方法点睛　对于该题的解答,我们看到解决该题的方法大多是从证明的角度解决,这背离命题的意图,而补成三棱柱后,立足整体,思路变得非常清晰,直线

BM,EN关系变成三角形中的相交线,BM,EN的长度比较,实质上无需运算,因为在等腰三角形BDE中,BM,EN分别是底边和腰上的中线,长度显然不等.这才是命题的宗旨.可以理解为命题人是在三棱柱中先找到里面的关系,然后,隐去三棱柱的一些棱来考查考生的空间想象能力.

4 新高考对复习的启示

4.1 选择好的问题

美国数学家哈尔斯说:“问题是数学的心脏.”没有好的问题,就没有异彩纷呈的数学,没有好的问题去引领学生的学,就没有数学课堂的精彩.教师教的“有效”要通过“好题”的深入浅出,落实学生学的“有效”.数学解题是一种创造性活动,谁也没法教会我们解决所有题目,重要的是通过有限题目学习去领悟无限道题目的数学机智,好的问题是“一只产金蛋的母鸡”.

4.2 重视作图

作图是立体几何重要的基本技能,作图是立体几何解题的前提,正确理解立体几何图形的联系,找到图形的“源”与“流”,是学好立体几何的“秘密”.一方面,必要的解题活动是学好立体几何学习的必要途径,通过解题培养发现问题、解决问题的能力,另一方面,解题对于培养空间想象力、巩固立体几何的定义、定理的理解和运用有不可替代的作用.

5 结束语

新课程下的高考命题突出素养立意,多以策略性知识为背景,考查学生的必备知识、关键能力、学科素养和核心价值,立体几何的核心价值就是发展几何直观、空间想象能力、逻辑推理能力.要求学生增强运用几何直观和空间想象思考问题的意识,在比较复杂的情境中把握事物之间的关联,理解命题体系,表述论证过程,形成重论据、有条理、合乎逻辑的思维品质和理性精神.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.

[2] 姜仁驹.关于初中数学课程标准的“基本理论”[J].数学通报,2005,44(08):1-3.

[3] 赵峰.一题多变导数题[J].数学通讯,2015(5,6):80-81.

作者简介 梁乾培(1969—),男,山东临沂人,中学正高级教师,临沂市骨干教师,兼职教研员;主要研究高考数学解题;多年参与临沂市高三质量检测题的命题,发表论文多篇.

基于PISA2021分析高考情境题的数学推理能力*

广西师范大学数学与统计学院 530013 俞卓君 周 莹† 陈基河

【摘 要】 本文以PISA2021数学推理与问题解决为框架,从情境、内容、素养、过程四个维度,结合部分高考情境试题说明数学推理的具体体现,以期为教师教学提供参考.研究结果表明近几年高考数学卷情境化试题背景在函数、几何、概率等主线都有所体现,并贯穿于六大核心素养中.为了更好地培养学生的数学推理能力,在教学中可以注重对解释部分的评价,同时加强数学抽象与数学建模素养的培养,情境试题的素材选取更多贴近生活实际.

【关键词】 PISA2021;数学推理;问题解决;高考情境试题

1 问题提出

PISA是一项跨国跨文化的指向学生素养评估的大规模测试,无论是试题还是测评结果都对教育评价有着重要的研究意义.PISA2021测评框架与前几个版本的区别是重点强调了数学推理能力在问题解决过程中的体现[1],如图1.

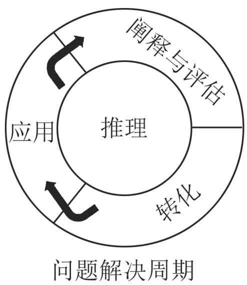

图1 PISA2021问题解决周期

PISA测试与中国的数学高考测试内容完全不同,但都希望能在检测过程中反映社会需求[2].高速发展的21世纪对培养多样化高素质人才、发展高阶思维的需求愈加紧迫,[3-4]问题解决成为发展高阶思维、培养21世纪技能的重要途径.许多国家都把发展学生的数学推理能力放在问题解决过程中培养,并成为了重要的教学目标之一.推理能力在问题信息的提取、筛选和整理过程中起着至关重要的作用,

* **基金项目** 2019年度广西高等教育本科教学改革工程重点项目(2019JGZ110);2021年度广西研究生教育创新计划项目(YCSW2021102).

†本文通讯作者.