

假于情境 基于理解 意义建构

——“充分条件与必要条件”教学设计与反思*

陈敏 (江苏省锡山高级中学 214174)



文章编号:1004-1176(2022)05-0004-04

作者简介:陈敏,女,江苏省特级教师,正高级教师,现执教于江苏省锡山高级中学,2020年被无锡市委组织部、无锡市人社局联合授予个人记功,无锡市学科带头人,常年担任高三毕业班班主任及数学教学、自主招生与北大清华强基计划辅导等工作,班主任工作尤为突出,历次教学满意率均为100%,连年被学生评为“生命中的恩师”,有独到的人格魅力,在广大师生及家长中有较高的威望,在核心期刊、国家级、省级期刊上发表论文30余篇,其中6篇被中国人民大学书报资料中心全文转载,主持、核心参与三项省级课题研究。

1 基本情况

1.1 授课对象

学生来自江苏省高品质高中普通班,基础较好。在初中,学生对命题有了初步的认识,对平行四边形以及三角形全等、三角形相似等定理有较好的理解与掌握,以这些知识为载体学习本节内容,较易上手。学生有一定的自学能力与推理能力。

1.2 教材分析

所用教材为《普通高中教科书数学·必修第一册》(人教A版,2019年6月第1版)。“充分条件与必要条件”是第1章《集合与常用逻辑用语》的第4节第1课时,第2课时是“充要条件”。充分条件与必要条件是中学数学中重要的概念之一,它主要讨论了命题的条件与结论之间的逻辑关系,目的是为今后的数学学习,特别是数学推理的学习打下基础。与旧版相比,新人教A版删去了四种命题的概念,只是在讲充要条件的时候,简单地插入了逆命题的概念,给充分条件与必要条件的教学带来了一定的困难,尤其是必要条件中必要性的理解,也许是基于这个原因,教材将1.4节分成“1.4.1充分条件与必要条件”和“1.4.2充要条件”两课时,以减少学生的学习困难。

教学目标 (1)体会“通俗语言→文字语言→符号语言→数学概念”的认知过程,能理解“充分”“必要”的语文含义与数学问题的内在本质联系,把握充分条件与必要条件的意义,感悟数学概念的合理性;(2)会判断充分条件与必要条件,理解充分条件、必

要条件与判定定理和性质定理的相应关系;(3)掌握举反例这一判断一个命题是假命题的重要方法,提高辩证思维能力,崇尚科学严谨的理性精神。

教学重点 必要条件与充分条件的意义及其判定。

教学难点 必要条件的理解。

2 教学过程

2.1 知识回顾

师:回顾初中命题、真命题与假命题的定义。

生:可判断真假的陈述句叫命题,判断为真的语句是真命题,判断为假的语句是假命题。

师:一般地,“若 p ,则 q ”为真命题,是指由条件 p 通过推理可以得出结论 q ,这时,我们就说,由 p 可以推出 q ,记作 $p \Rightarrow q$ 。这体现了数学的简洁之美与符号化特征。

2.2 情境创设

播放大款 p 与小秘 q 的对话短片,引入课题。

短片大致内容如下:一位数学家从一间办公室走过,听到室内有两人在大声吵闹。大款 p 对小秘 q 大声吼道:“有我 p 在,就有你 q 吃香的喝辣的!”小秘 q 很不服气,气急败坏地说:“你的底细我可清楚,我完蛋了,也没有你的好日子过!”数学家走上前说:“你们所说的正是数学逻辑学中的充分条件与必要条件问题。”

设计意图 通过鲜活的生活实例创设情境,生动自然,极具场景画面感,既渲染了课堂气氛,激发了学生的学习兴趣,又恰当地引入了课题,为后面概

* 本文系江苏省无锡市教育科学“十三五”规划2020年度课题“高中数学核心问题通俗化的教学行动研究”(编号:E/D/2020/14)的阶段性研究成果。

念的形成与理解做好铺垫.这种情境创设同时又告诉学生,数学就在身边,鼓励学生数学地看待周围的世界.当然,这里仅仅是从数学意义上理解这一社会现象,还要注意正确引导学生的社会价值观.

2.3 概念建构

师:如果你是短片中的那位数学家,能否对大款 p 与小秘 q 相互之间的作用从数学意义上加以分析?

事实上,大款与小秘的关系用上面的 $p \Rightarrow q$ 符号,就可以表示成大款 \Rightarrow 小秘,有大款在,就有小秘吃香的喝辣的,即大款对小秘来说,是足够的、充分的,这时我们就说大款是小秘的充分条件;另一方面,如何体现小秘的作用呢?这个问题可以反过来思考,如果小秘完蛋了,大款也没有好日子过,即小秘完蛋了,大款也完蛋了,所以从这个意义上说,小秘对大款是必要的.回到数学意义上就是,如果 $p \Rightarrow q$,那么 p 对于 q 来说,是足够的、充分的,所以 p 是 q 的充分条件;另外, $p \Rightarrow q$ 从反面理解就是,如果 q 不成立,则 p 一定不成立,也就是说, q 对于 p 成立而言是必要的,所以 q 是 p 的必要条件.

数学概念:如果 $p \Rightarrow q$,那么 p 是 q 的充分条件,同时 q 是 p 的必要条件.

以上数学概念建构过程可用图1来表示.

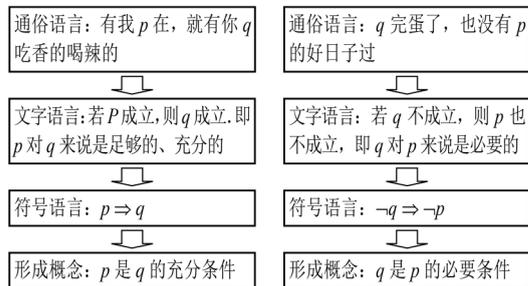


图1

设计意图 符号化、形式化是数学的基本特征.学生通过“通俗语言 \rightarrow 文字语言 \rightarrow 符号语言 \rightarrow 数学概念”的整个过程,经历数学概念的发生发展,体会感悟数学概念的合理性.试图努力揭示数学概念的本质要义,把数学的学术形态转化为学生易于理解、乐于学习的教育形态.

2.4 概念巩固

例1 下列“若 p ,则 q ”形式的命题中,哪些命题中的 p 是 q 的充分条件?

(1)若四边形的两组对角分别相等,则这个四边形是平行四边形;(2)若两个三角形的三边成比例,则这两个三角形相似;(3)若 $x^2=1$,则 $x=1$;(4)若 x, y 为无理数,则 xy 为无理数.

设计意图 (1)(2)都是判定定理, p 是 q 的充

分条件,为下面得出“每一个判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件”这个结论做准备;(3)(4)意在使学生通过具体问题,体会举反例这一判断一个命题是假命题的重要方法.设计这四个小题,会在后面的性质定理与必要条件的关系探究以及充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件的判断中再次利用.

解 (1)这是平行四边形的一个判定定理, $p \Rightarrow q$,所以 p 是 q 的充分条件.

(2)这是相似三角形的一个判定定理, $p \Rightarrow q$,所以 p 是 q 的充分条件.

(3)由于 $(-1)^2=1$,但 $-1 \neq 1$, $p \not\Rightarrow q$,所以 p 不是 q 的充分条件.

(4) $\sqrt{2}$ 是无理数,但 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ 是有理数, $p \not\Rightarrow q$,所以 p 不是 q 的充分条件.

师:如何判断一个命题的真假?

生:判断一个命题为真命题,要有定理作为支撑,或者经过严谨的数学推理给予证明;要判断一个命题为假命题,只要举反例即可.

总结:举反例是判断一个命题是假命题的重要方法.

师(追问):例1中命题(1)给出了“四边形是平行四边形”的一个充分条件,即“四边形的两组对角分别相等”,这样的充分条件唯一吗?如果不唯一,那么你能再给出几个不同的充分条件吗?

生1:若四边形的两组对边分别相等,则这个四边形是平行四边形.

生2:若四边形的一组对边平行且相等,则这个四边形是平行四边形.

生3:若四边形的两条对角线互相平分,则这个四边形是平行四边形.

师:你能得出什么结论呢?

学生讨论交流后回答:“四边形的两组对角分别相等”“四边形的两组对边分别相等”“四边形的一组对边平行且相等”“四边形的两条对角线互相平分”都可以判定平行四边形,都给出了“四边形是平行四边形”的一个充分条件.

总结:一般地,每一个判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件.

例2 下列“若 p ,则 q ”形式的命题中,哪些命题中的 q 是 p 的必要条件?

(1)若四边形为平行四边形,则这个四边形的两组对角分别相等;(2)若两个三角形相似,则两个三角形的三边成比例;(3)若 $x=1$,则 $x^2=1$;(4)若 xy 为无理数,则 x, y 为无理数.

设计意图 呼应例1,同样的数学问题,从不同

角度充分挖掘其教学功能价值.第一层功能价值:得出判定定理与充分条件的关系结论;第二层功能价值:得出性质定理与必要条件的关系结论;第三层功能价值:引出充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件等概念,为下一节充要条件铺垫伏笔.

解 (1)这是平行四边形的一个性质定理, $p \Rightarrow q$,所以 q 是 p 的必要条件.

(2)这是一条相似三角形的判定定理, $p \Rightarrow q$,所以 q 是 p 的必要条件.

(3) $p \Rightarrow q$ 显然成立,所以 q 是 p 的必要条件.

(4)因为 $1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$ 是无理数,但 $1, \sqrt{2}$ 不全是无理数, $p \not\Rightarrow q$,所以 q 不是 p 的必要条件.

同例1的处理方式一样,教师先追问“四边形是平行四边形”的必要条件唯一吗?如果不唯一,那么你能再给出几个不同的必要条件吗?学生经过讨论交流得出不同的必要条件,进而得出结论:一般地,每一个性质定理都给出了相应数学结论成立一个的必要条件.

2.5 深入探究

师:大家研究一下两个例题的第(1)题,你有什么发现?

生:若四边形的两组对角分别相等,则这个四边形是平行四边形;反过来,若四边形为平行四边形,则这个四边形的两组对角分别相等,前一个命题说明“四边形的两组对角分别相等”是“四边形为平行四边形”的充分条件,后一个命题说明“四边形的两组对角分别相等”是“四边形为平行四边形”的必要条件,也就是说,“四边形的两组对角分别相等”是“四边形为平行四边形”的充分必要条件,即充要条件.

师:大家的研究能力很强!我们来继续研究一下两个例题的第(3)(4)题,你又有什么发现?

生1:第(3)题, $x=1 \Rightarrow x^2=1$,但 $x^2=1 \not\Rightarrow x=1$,所以 $x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分不必要条件,同时 $x^2=1$ 是 $x=1$ 的必要不充分条件.

生2:第(4)题, x, y 为无理数 $\Rightarrow xy$ 为无理数, xy 为无理数 $\Rightarrow x, y$ 为无理数,所以 x, y 为无理数与 xy 为无理数互为既不充分也不必要条件.

师:刚才大家对例1例2具体问题进行了比较研究,你能试着总结出判断充分条件与必要条件问题的流程吗?在这一判断过程中要注意什么?

学生经过合作交流,试着总结出判断充分条件与必要条件问题的流程图及注意事项(图2).

注意事项:由于 p 是 q 的充分条件,同时 q 是 p 的必要条件,所以要看清问题,所问的是谁是谁的什么条件.

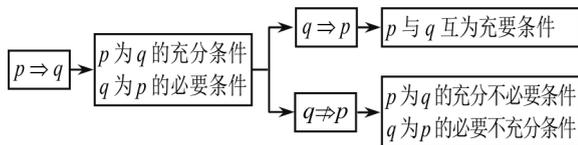


图2

2.6 课堂练习

(1)同桌同学互出一题,交换完成,相互批改,共同进步;(2)教材第20页练习.

2.7 课堂小结,布置作业(略)

3 回顾与反思

3.1 设计思路

本节课按照“情境创设—意义建构—数学概念—数学运用”的逻辑顺序结构,学生经历数学概念的形成历程,通过思考、讨论、合作、交流等不同形式的自主学习和探究活动,体验、感知、建构、运用数学概念.本设计试图努力揭示数学概念的发生发展过程,帮助学生深度理解数学概念的本质要义,进而体会感悟数学概念的合理性,把数学的学术形态转化为学生易于理解、乐于学习的教育形态,再把这种教育形态提升到符号化、形式化的学术形态.

3.2 设计特色

(1)假于情境,意义建构

建构主义学习理论认为“情境”“协作”“会话”和“意义建构”是学习环境中的四大要素或四大属性,学习环境中的情境必须有利于学生对所学内容的意义建构,这就对教学设计提出了新的要求.在建构主义学习环境下,教学设计不仅要考虑教学目标分析,还要考虑有利于学生意义建构的情境创设问题,并把情境创设看作是教学设计的最重要内容之一.教学设计的主要功能就在于选择或创设合理的、与现实生活紧密关联的、真实性的问题情境,学生通过基于问题或项目的活动,开展体验式的、合作的、探究的或建构式的学习,以促进学习真正发生.在这一过程中,个体创生知识,形成思维观念,提升探究技能,发展核心素养.

大款 p 与小秘 q 的对话短片情境创设,极具场景画面感,亲切自然,既渲染了课堂气氛,激发了学生的学习兴趣,又恰当地引入课题,为后面概念的形成做好铺垫,有利于学生概念建构与本质理解,同时又告诉学生,生活即数学,数学就在身边,鼓励学生数学地看待周围的世界.

(2)基于理解,努力追求数学概念的合理性

结合大款 p 与小秘 q 的对话短片,剥去表面现象后,再回归数学.如果 $p \Rightarrow q$,那么 p 对于 q 来说是足够的、充分的,所以 p 是 q 的充分条件;从反面理解就是,如果 q 不成立,则 p 一定也不成立,即说明 q 对于 p 成立而言是必要的,所以 q 是 p 的必要条件.

这样努力帮助学生理解“充分条件与必要条件”概念说法的合理性与自然性,而不是把所谓权威的数学理论硬生生地塞给学生。

(3) 探求教学模式与学习方式的变革

充分调动每一个学生的学习热情与学习兴趣,把课堂真正还给学生,学生才是课堂的主人,教师只是教学活动的组织者、参与者、协调者、合作者与服务者。如由“通俗语言—文字语言—符号语言—数学概念”的形成过程,充分条件和必要条件判断的流程图与注意事项均由学生思考讨论总结完成,再如在对数学知识本质把握和深刻理解的基础上,学生由“做别人出的题”到“出题给别人做”,由答题者转换到命题者,很好地体现了自我建构与深度学习。

(4) 一题多用,前后呼应,充分挖掘其教学功能价值。

同样的数学问题,从不同角度充分挖掘其教学功能价值。如两个例题就有三层功能价值:第一层,得出判定定理与充分条件的关系结论;第二层,得出性质定理与必要条件的关系结论;第三层,引出充分不必要条件、必要不充分条件、既不充分又不必要条件以及充要条件概念,为下一节充要条件铺垫伏笔。

(上接第3页)

议女儿也像弟弟一样,找老师谈好,自主决定作业量。”另外,也正是在父亲的鼓励与支持下,女儿高考时放弃比较稳妥的浙江大学选择了不能颁发国家承认的本科文凭的南方科技大学,4年后,陈杳获三所世界名校全额奖学金,赴国外攻读博士。

以下则是陈钱林关于家庭教育的总结:“我教育的核心思想,是自律、自学、自立。”^[7]

第二,最近大火的“冰墩墩”主要设计者的实际经历可以被看成后一方面的典型例子:此人特别喜爱画画,但对数学却始终学不进去。以下就是他近日接受媒体采访时表达的一个情感,即十分感谢他的母校(南京大学附属中学,原南京市第十一中学)为他的成长提供了十分宽松和友善的环境:只要他安安静静地坐在教室里,更不要缺课,数学课可以完全不听,数学也可以完全不学——此时的他就将时间用在了画画之上,画同学和教师的速写,画各种静物……

但是,究竟又有多少学校和教师能够做到这样一点,即采取如此开放的态度,并能给学生如此多的理解与包容?!

当然,我们也应特别强调这样一点:教育的主要功能是促进学生的成长,包括通过适度的规范实现必要的优化。因此,我们所应提倡的就是另一种“奥妙的平衡”：“创造的自由性和指导的约束性之间”的

3.3 设计感受

教材中,若 $p \Rightarrow q$,就说 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件,笔者认为,这样直接给出定义,没有说明“充分”“必要”如何理解,略显突兀,学生理解起来比较困难,不利于建立“充分”“必要”的语义与数学问题的本质之间的内在联系。

在前面例题和练习没有任何涉及的情况下,教材习题1.4复习巩固第1题,就让学生举例说明“ p 是 q 的充分不必要条件, p 是 q 的必要不充分条件”,实在是有点为难学生了,这样做不太符合学生的认知规律(作为弥补,本教学设计中教师引导学生对两个例题的具体问题做了比较研究)。退一步讲,即便这样处理,复习巩固第2题是判断具体问题的 p 是 q 的什么条件(“充分不必要条件”“必要不充分条件”“既不充分也不必要条件”“充要条件”),总比学生自己举例说明要容易一些,因为学生通过具体问题的判断,大致了解了这类问题的基本情况以后,把这些新概念再结合自己的数学认知,才可能比较容易举出自己的例子。毕竟举例说明不是解决现成的问题,而是创造性地提出问题,提出问题往往比解决问题难得多,基于此,建议把第1题与第2题顺序调换一下。

平衡。(我们将在以下联系数学学习的特殊性做出进一步的分析论述)

最后,还应强调的是,正因为我们在此是就一般学习进行分析的,相关结论就有较大的普遍性;当然,就学生如何能够学好数学而言,我们又应高度重视数学学习的特殊性。这也正是以下两节的具体内容。

(待续)

参考文献

- [1] 邱学华.邱学华怎样教儿童学数学[M].上海:上海教育出版社,2021:84-85.
- [2] 保罗·洛克哈特.一个数学家的叹息:如何让孩子好奇、想学习、走进美丽的数学世界[M].高翠霜,译.上海:上海社会科学出版社,2019:132.
- [3] 托马斯·弗里德曼.谢谢你迟到——以慢制胜,破题未来格局[M].符荆捷,朱映臻,崔艺,译.长沙:湖南科学技术出版社,2017:11.
- [4] 张奠宙.中国数学教育的软肋:高中空转——冯祖鸣老师等访谈录[J].数学教学,2007(11):封二-1.
- [5] 厉佳旭.最好的校园令人发呆[J].人民教育,2020(1):49-52.
- [6] 陈立军.陪学生遇见美好的自己[J].人民教育,2020(5):78-80.
- [7] 胡卉.为26岁天才数学家做父亲[N].报刊文摘,2021-06-09.