基于数学抽象的“裂项法”教学设计探析*

俞文锐　（福建省福清华侨中学　350300）

摘　要：从培养数学抽象核心素养的角度出发设计“裂项法”教学，需要教师在了解学生的认知规律的基础上，结合学生的最近发展区，创设问题情境，引领学生感知“裂项”背景，从数列和函数的角度抽象出“裂项”特征，进而概括出“裂项”公式，培养和发展学生数学核心素养.

关键词：裂项；数列；构造函数；数学抽象；核心素养

文章编号：1004-1176(2022)07-0037-03

数学抽象是数学的基本思想，是数学的本质特征的一种反应，也是形成数学学科理性思维的基础，数学抽象贯穿于概念公式的产生、发展、应用的过程中.[1]如何在数学教学过程中培养学生的数学抽象核心素养呢？这需要教师把握问题的数学本质，结合数学抽象的特点，创设有序多级的问题情境引导学生主动思考，逐步提高抽象概括能力，积累从具体到抽象的基本活动经验，形成良好的思考问题的习惯，灵活运用数学抽象的思维方式思考新问题、解决新问题.下面以“裂项法”教学为例，探究如何培养和发展学生的数学抽象核心素养.

引例　（人教 A 版数学必修 5 第 47 页习题 2.3B 第 4 题）数列$\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}$，研究一下，能否找到 S_n 的一个公式.你能对这个问题作一些推广吗？

对于这个问题，多数教师采用如下解法：

解　数列$\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$的通项公式 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，所以 $S_n=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$这个变形是如何想到的？有的教师认为这是经验，有些教师则停留在式子的形变上，这都无法回答“如何想到的”这一问题.通过分析可以发现，本题需要解决以下两个问题：首先是如何想到“裂项”，其次是如何想到可以裂成$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{(n+1)}$.

那么裂项法求和的思维起点是什么？教师要如何创设问题情境来让学生自然地接受这一裂项求和的过程呢？

1　数学情境，感知“裂项”背景

情境 1　若已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n，那么数列$\{a_n\}$的通项 $a_n(n>1)$与数列$\{S_n\}$的通项之间存在什么样的联系？

师生活动：若已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n，那么 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1),\\S_n-S_{n-1}(n\geqslant 1),\end{cases}$由此我们可以知道，数列$\{a_n\}$的通项 $a_n(n>1)$可以“裂成”数列$\{S_n\}$前后两项之差的形式.

情境 2　等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，令 $b_n=d$，那么数列$\{b_n\}$的每一项 d 与数列$\{a_n\}$的通项 a_n 之间存在什么样的联系？数列$\{b_n\}$的前 n 项和能否用等差数列$\{a_n\}$的项表示？

师生活动：(1)根据等差数列的定义，可得 $d=a_n-a_{n-1}$，则数列$\{b_n\}$的每一项 d 可以“裂成”数列通项$\{a_n\}$前后两项之差的形式：$d=a_2-a_1$，$d=a_3-a_2$，…，$d=a_{n+1}-a_n$.

(2)数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=nd=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1$.

评析：数学抽象的过程必须遵循循序渐进的原则，要明晰学生的认知结构和最近发展区，可以确定等差数列的公差、通项等相关概念，以及任意数列$\{a_n\}$的通项与其前 n 项和 S_n 之间的关系是“裂项法”抽象的原型.教学应当引导学生在抽象原型的基础上进行数学抽象，从而获得裂项的本质特征.

* 本文是福建省教育科学“十三五”规划 2020 年度立项课题“信息技术环境下教学预设与生成的实践研究”(编号：FJJKXB20-826)的研究成果.

2　数学探究,抽象“裂项”特征

提高裂项本质特征出现的频率,从而引起学生对“升幂裂项”和“构造函数裂项”这一特征的关注,使这一特征独立于任何问题情境,并且每一次特征的出现都具有一种优势联结.

问题 1　已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=2n$,你能求出 a_n 吗?你能把数列$\{a_n\}$裂成新数列$\{b_n\}$的前后两项之差吗?你能从函数的角度予以解释吗?

师生活动:因为数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$S_n=2n$,当 $n=1$ 时,代入可得 $S_1=a_1=2$,而由 $a_n=S_n-S_{n-1}$,代入可得 $a_n=2n-2(n-1)=2$,当 $n=1$ 时上式也成立.综上可知,$a_n=2$.如果我们变换角度观察,可以发现 $2=2n-2(n-1)$.

从数列角度看,常数列$\{a_n\}$的每一项“2”都可以裂成新数列$\{2(n-1)\}$的前后两项之差,令 $b_n=2(n-1)$,则 $a_n=2=b_{n+1}-b_n$.

数列是特殊的函数,从函数的观点看,令 $f(x)=2(x-1)$,则 $a_n=2=f(n+1)-f(n)$,即$\{a_n\}$的每一项“2”都可以裂成一次函数 $f(x)=2(x-1)$的两个函数值 $f(n+1)$与 $f(n)$的差.

问题 2　已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=n^2+2n$,你能求出 a_n 吗?你能把数列$\{a_n\}$裂成新数列$\{b_n\}$的前后两项之差吗?你能从函数的角度予以解释吗?

师生活动:因为数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$S_n=n^2+2n$,当 $n=1$ 时,代入可得 $S_1=a_1=1^2+2=3$,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-[(n-1)^2+2(n-1)]=2n+1$,当 $n=1$ 时上式也成立.综上,可知 $a_n=2n+1$,如果我们变换角度观察,可以发现:$2n+1=n^2+2n-[(n-1)^2+2(n-1)]$.

从数列角度看,$\{a_n\}$的每一项“$2n+1$”都可以裂成新数列$\{(n-1)^2+2(n-1)\}$的前后两项之差,令 $b_n=(n-1)^2+2(n-1)$,则 $a_n=2n+1=b_{n+1}-b_n$.

从函数的观点看,令 $f(x)=(x-1)^2+2(x-1)=x^2-1$,则 $a_n=2n+1=f(n+1)-f(n)$,即$\{a_n\}$的每一项“$2n+1$”都可以裂成二次函数 $f(x)=x^2-1$ 的两个函数值 $f(n+1)$与 $f(n)$的差.

问题 3　已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2^{n+1}-2$,你能求出 a_n 吗?你能把数列$\{a_n\}$裂成新数列$\{b_n\}$的前后两项之差吗?你能从函数的角度予以解释吗?

师生活动:因为 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $a_n=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)=2^n$.检验当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2$,故 $a_n=2^n$.

如果我们变换角度观察,可以发现 $2^n=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)$,简化得 $2^n=2^{n+1}-2^n$,从数列角度看,$\{a_n\}$的每一项“2^n”都可以裂成新数列$\{2^n\}$的前后两项之差,令 $b_n=2^n$,则 $a_n=2^n=b_{n+1}-b_n$.

从函数的观点看,令 $f(x)=2^x$,则 $a_n=2^n=f(n+1)-f(n)$,即$\{a_n\}$的每一项“2^n”都可以裂成指数型函数 $f(x)=2^x$ 的两个函数值 $f(n+1)$与 $f(n)$的差.

评析:能否从“裂项法”抽象物的原型中发现并抽取裂项法的本质属性,是教师能否培养和提高学生数学抽象核心素养的关键.我们可以采用突出“特征”法,提高“特征”出现次数,通过对问题情境的变化,让学生发现变化的背景中不变的东西,就是我们要抽象的“特征”.

3　数学体悟,概括“裂项”公式

运用数学符号表征指导裂项法的教学,引导学生将裂项的本质属性转化为公式的形式.

从特殊到一般的抽象概括,把裂项的本质特征升幂裂项和构造函数裂项,一步一步抽象出来.

我们可以把常见的数列$\{a_n\}$裂成新数列$\{b_n\}$的前后两项之差,并且从函数的角度予以解释.

结论 1　数列角度:$A=An-A(n-1)$,$A=(An+B)-[A(n-1)+B]$,$b_n=A(n-1)+B$.

函数的观点:令 $f(x)=A(x-1)$或 $f(x)=A(x-1)+B$,则 $A=f(n+1)-f(n)$,$b_n=f(n)$.

结论 2　数列角度:$An+B=kn^2+tn-[k(n-1)^2+t(n-1)]$,$b_n=k(n-1)^2+t(n-1)$,其中 $k=\dfrac{A}{2}$,$t=B-\dfrac{A}{2}$.

函数的观点:令 $f(x)=k(n-1)^2+t(n-1)$,则 $An+B=f(n+1)-f(n)$,$b_n=f(n)$.

师生活动:因为 $An+B=kn^2+tn-[k(n-1)^2+t(n-1)]=2kn+t-k$,$A=2k$,$B=t-k$,则 $k=\dfrac{A}{2}$,$t=B-\dfrac{A}{2}$.

结论 3　数列角度:① $2^n=2^{n+1}-2^n(n\geqslant 1,n\in\mathbf{N}^*)$;② $q^n=\dfrac{1}{q-1}\cdot q^{n+1}-\dfrac{1}{q-1}\cdot q^n$,其中 $b_n=\dfrac{1}{q-1}\cdot q^n$.

函数的观点:令 $f(x)=\dfrac{1}{q-1}\cdot q^x$,则 $q^n=f(n+1)-f(n)$,$b_n=f(n)$.

师生活动:猜想 $q^n=q^{n+1}-q^n(n\geqslant 1,n\in\mathbf{N}^*)$,

验证发现 $q^{n+1}-q^n=(q-1)q^n$，所以 $q^n=\frac{1}{q-1}(q^{n+1}-q^n)=\frac{1}{q-1}\cdot q^{n+1}-\frac{1}{q-1}\cdot q^n$.

评析：将数列纳入函数体系中，从函数的角度研究数列，充分体现了新课标所倡导的大背景大框架大思路的研究方法，用数学符号表达是数学抽象的重要环节，能够提高学生用数学的语言表达世界的能力. 从具体的问题情境中抽象出了裂项的思路和方法，并用数学符号（公式）予以表示，在这一过程中，学生累积了从具体背景中抽象出数学概念的活动经验. 从结论 1～3 我们发现可以通过升幂进行裂项，可以通过一次函数、二次函数、指数型函数构造新数列，提炼出了解决一类裂项问题的基本方法，同时理解了裂项所蕴含的数学思想：升幂裂项和构造函数裂项. 根据满意原则可以认为学生达到数学抽象素养水平二的要求.

4　数学内化，辨析"裂项"内涵

新的概念获得后学生掌握得还不牢固，需要创设新的问题情境强化概念，使其认知结构能够同化或顺应升幂裂项和构造函数裂项.

问题 4　已知数列 $\{a_n\}$，通项公式 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，你能把数列 $\{a_n\}$ 裂成新数列 $\{b_n\}$ 的前后两项之差吗？你能通过新数列 $\{b_n\}$ 求出数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 吗？

师生活动：从函数观点出发，能不能找到一个函数 $f(x)$，使得 $a_n=f(n+1)-f(n)$ 呢？前面我们用次函数、二次函数、指数型函数构造出了新数列，观察 $\{a_n\}$ 的特征并进行猜想：能不能用反比例函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 进行构造？通过计算发现 $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{-1}{n(n+1)}$，令 $f(x)=-\frac{1}{x}$，则 $f(n+1)-f(n)=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=a_n$，令 $b_n=-\frac{1}{n}$，则 $a_n=b_{n+1}-b_n$.

于是 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1=-\frac{1}{n+1}-(-1)=\frac{n}{n+1}$.

结论 4　已知 $f(x)=-\frac{1}{x}$，若令 $a_n=\frac{1}{k}[f(n+k)-f(n)]$，则可以构造出新的可裂项数列 $\{a_n\}$.

问题 5　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=2^n\cdot(2n-1)$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

证明：$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n\cdot(2n-1)$.

猜想：$S_n-S_{n-1}=(2n-1)\cdot 2^n=(An^2+Bn+C)2^{n+1}-[A(n-1)^2+B(n-1)+C]2^n=(An^2+Bn+C)2^{n+1}-[A(n-1)^2+B(n-1)+C]2^n=[An^2+(2A+B)n+C+B-A]2^n$，$A=0$，$B=2$，$C=-3$.

$a_n=(2n-3)2^{n+1}-[2(n-1)-3]2^n$，令 $b_n=[2(n-1)-3]2^n$，则 $S_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-a_3)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1=(2n-3)2^{n+1}+6$.

结论 5　$(pn+q)\cdot C^n=(An+B)C^{n+1}-[A(n-1)+B]C^n=[(AC-A)n+BC+A-B]C^n$，其中 $AC-A=p$，$BC+A-C=q$.

评析：如果学生能够在新的问题情境中理解升幂裂项和构造函数裂项结论的一般性，能够针对问题 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，运用构造函数 $f(x)=-\frac{1}{x}$ 裂项，能够针对问题 $a_n=2^n\cdot(2n-1)$，创造数学方法 $a_n=(2n-3)2^{n+1}-[2(n-1)-3]2^n$ 裂项. 根据加分原则，可以认为学生达到数学抽象素养水平三的要求.

5　数学应用，深化"裂项"应用

通过应用不断提升学生的数学抽象能力，可以锻炼学生综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力，培养和发展数学核心素养.

问题 6　求数列 $\{n^3\cdot 2^n\}$ 的前 n 项和.

解析　由 $n^3\cdot 2^n=[A(n+1)^3+B(n+1)^2+C(n+1)+D]\cdot 2^{n+1}-(An^3+Bn^2+C_n+D)\cdot 2^n=[An^3+(6A+B)n^2+(6A+4B+C)n+2A+2B+2C+D]\cdot 2^n$，比较系数得 $\begin{cases}A=1,\\6A+B=0,\\6A+4B+C=0,\\2A+2B+2C+D=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=1,\\B=-6,\\C=18,\\D=-26,\end{cases}$ 即 $n^3\cdot 2^n=[(n+1)^3-6(n+1)^2+18(n+1)-26]\cdot 2^{n+1}-(n^3-6n^2+18n-26)\cdot 2^n$. 所以数列 $\{n^3\cdot 2^n\}$ 的前 n 项和 $T_n=[(n+1)^3-6(n+1)^2+18(n+1)-26]\cdot 2^{n+1}-(1^3-6\times 1^2+18\times 1-26)\cdot 2^1=(n^3-3n^2+9n-13)\cdot 2^{n+1}+26$.

通过运用裂项相消法，能够轻松解决这类数列求和问题，避开了利用错位相减法求和的复杂计算，显得思路清晰明了.

问题 7　已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^3$，求其前 n 项和 S_n.

利用常规的数列前 n 项和的求和方法无法奏效，但是利用升幂裂项的思想，可以轻松化解难题.

（下转第 61 页）

3.4 教材编写应注重策略模型的具象性与操作性

Sfard提出，许多代数中的概念既表现为一种过程操作，又表现为对象、结构.概念的形成往往要从操作过程开始，再转变为对象的认知.[19]这就是说，初学概念时，要将概念转变为可以操作的"实体"，学生才能理解概念的本质.所有策略中只有筹码分析策略将负数转化为可以操作的实体，一个黄筹码代表1，一个红筹码代表-1，而表示运算符号的"$-$"则表示"移出"，这让学生很好地区分运算符号和性质符号.因此，建议我国初中数学教材引入筹码模型，让学生在操作中理解四则运算的本质.

参考文献

[1] 綦春霞.数学问题解决在中国的研究历史及其影响[J].课程·教材·教法，2007(12)：32-35，63.
[2] 李欣莲，曹一鸣.21世纪数学教育研究：议题与趋势——基于ICME专题研究主题分析[J].教育理论与实践，2017，37(5)：55-58.
[3] 陈爱苾.培养学生的"问题解决"能力[N].中国教育报，2007-03-27(12).
[4] 高翔.20世纪以来中国初中数学课程标准中数学问题解决能力内涵与要求的演变[J].数学教育学报，2019，28(3)：30-35.
[5] 丁福军，张维忠.创造性思维在数学教材中的呈现研究[J].浙江师范大学学报(自然科学版)，2021，44(2)：234-240.
[6] 巩子坤."负负得正"何以能被接受[J].数学教学，2010(3)：7-10.
[7] 费岭峰.新版课标视域下"问题解决"的定位与教学设计思考——以人教版《义务教育教科书·数学》的使用为例[J].课程·教材·教法，2015，35(2)：39-44.
[8] 钟启泉.杜威的"问题解决法"[J].基础教育课程，2016(13)：89.
[9] 贾文华.问题解决认知模式及其对学科教学的启示[J].上海教育科研，2009(1)：75-77.
[10] 喻平.数学学习心理的CPFS结构理论与实践[M].南宁：广西教育出版社，2008：150.
[11] 吕传汉，汪秉彝.论中小学"数学情境与提出问题"的教学[J].数学教育学报，2006，15(2)：74-79.
[12] 王薇.指向问题解决能力发展的学习活动模型研究——基于情境学习理论的分析框架[J].教育学术月刊，2020(6)：88-95.
[13] 杨孝曼，汪晓勤.美英早期教科书中的负数概念[J].数学通讯，2021(7)：1-5，18.
[14] 郑君文，张恩华.数学学习论[M].南宁：广西教育出版社，2003：63.
[15] 邵爱娣，栗小妮，汪晓勤.美国早期代数教科书中的"负负得正"解释方式研究[J].数学教育学报，2021，30(1)：85-90.
[16] 李单，李健."负负得正"法则的解释模型——基于中、日、新、美、澳初中数学教科书的比较[J].中学数学杂志，2020(8)：40-44.
[17] 任子朝，赵轩.数学考试中的结构不良问题研究[J].数学通报，2020，59(2)：1-3.
[18] 唐恒钧，张维忠.问题链教学的理论与实践[M].上海：华东师范大学出版社，2021：49-51.
[19] Sfard, A., Linchevski, L. The gains and the pitfalls of reification: the case of algebra[J]. Educational Studies in Mathematics, 1994, 26(2/3): 191-228.

(上接第39页)

解　设$a_n=(An^4+Bn^3+Cn^2+Dn)-[A(n-1)^4+B(n-1)^3+C(n-1)^2+D(n-1)]=A(4n^3-6n^2+4n-1)+B(3n^2-3n+1)+C(2n-1)+D=4An^3+(-6A+3B)n^2+(4A-3B+2C)n+(-A+B-C+D)=n^3$，通过比较系数得$\begin{cases}4A=1\\-6A+3B=0,\\4A-3B+2C=0,\\-A+B-C+D=0,\end{cases}$解得$A=\frac{1}{4}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{4}$，$D=0$，所以$a_n=\left(\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\right)-\left[\frac{1}{4}(n-1)^4+\frac{1}{2}(n-1)^3+\frac{1}{4}(n-1)^2\right]=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2$，所以$S_n=\left(\frac{1\times2}{2}\right)^2+\left(\frac{2\times3}{2}\right)^2-\left(\frac{1\times2}{2}\right)^2+\left(\frac{3\times4}{2}\right)^2-\left(\frac{2\times3}{2}\right)^2+\cdots+\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

数学抽象核心素养培养的五个环节是创设情境，感知"裂项"背景；数学探究，抽象"裂项"特征；数学体悟，概括"裂项"公式；数学内化，辨析"裂项"内涵；数学应用，深化"裂项"应用.这五个环节，环环相扣构建了一个完整的抽象体系，对培养和发展学生数学核心素养具有一定的实践指导意义.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京：人民教育出版社，2020：4-5.