映了学生灵活运用所学知识解决问题的能力.这就要求高中的教学也应随之发生变化,回归到数学的本质上来,激发学生的好奇心与求索心理,让学生体会到数学的有用、有趣,懂得数学为什么学[5],通过激发学生的内动力提高其数学素养,真正实现这一轮高考改革的目标,进一步为国家培养和选拔高素质人才.

参考文献

[1] 教育部考试中心.中国高考评价体系[M].北京:人民教育出版社,2019.
[2] 姜钢,刘桔.牢记立德树人使命 写好教育考试奋进之笔[N].中国教育报,2018-3-3.
[3] 中国高考报告学术委员会编.《中国高考报告2021》[M].北京:新华出版社,2021.
[4] 张天德,安学保.新高考数学思维突破100题上册,下册[M].济南:山东科学技术出版社,2021.1.
[5] 王云剑,张天德,安学保.新高考数学学科学业指导[M].济南:山东人民出版社,2021.12.

作者简介 张天德(1962—),男,山东德州人,山东大学数学学院教授,山东省教学名师;主要从事大学数学与高考数学的研究.

张召生(1969—),男,山东曲阜人,曲阜师范大学期刊中心副主任;主要从事运筹学与控制论、中学数学教育、数学思想方法论研究.

王云剑(1974—),女,山东济南人,济南新航实验外国语学校高级教师,济南名师;主要从事高中数学与高中教育教学理论研究.

岳峰(1978—),男,山东威海人,济南第三中学数学高级教师;主要从事高考数学与课程管理及开发的研究.

回顾与展望*

——以高考数学全国卷中“函数与不等式”的内容为例

北京丰台二中 100071 甘志国

【摘 要】 高三数学复习备考,涉及“函数与不等式”的复习内容很多,为了高效复习备考,文章从回顾2021年高考数学试卷(仅限于使用广泛的6套全国卷)中“函数与不等式”内容的试题入手,结合课程标准分析其规律,进而展望2022年高考数学试卷(全国卷)中“函数与不等式”内容试题的特点.

【关键词】 函数与不等式;导数;函数的单调性;高三数学;展望

函数是整个高中数学的一条主线,函数与不等式又紧密相连,因而“函数与不等式”是高三数学复习的重要内容之一.

考生要熟练掌握函数(特别是幂函数、指数函数、对数函数等基本初等函数及三次函数)的概念、基本性质(包括定义域、值域、单调性、奇偶性与图象),了解其他性质(包括连续性、周期性、对称性、有界性、可导性、凹凸性、极值与最值等).函数最重要的性质是单调性,若求出了一个函数的所有单调区间,就可画出该函数的图象,进而可得到该函数的极值、最值、值域等性质.

2021年高考数学试卷共10套,其中全国卷6套:甲卷(云南、广西、贵州、四川、西藏使用)文科、甲卷理科、乙卷(河南、山西、江西、安徽、甘肃、青海、内蒙古、黑龙江、吉林、宁夏、新疆、陕西使用)文科、乙卷理科、新高考卷1(山东、广东、福建、江苏、湖南、湖北、河北使用)、新高考卷2(海南、重庆、辽宁使用);地方自主命题卷4套:北京、天津、上海、浙江.

涉及“函数与不等式”的复习内容很多,为了高效复习备考,本文将从回顾2021年高考数学试卷(仅限于使用广泛的6套全国卷)中“函数与不等式”内容的试题入手,结合教育部制定的《普通高中课程标准(2017年版2020年修订)》[1]分析其规律,进而展望2022年高考数学试卷(全国卷)中“函数与不等式”内容试题的特点.文章内容仅代表个人观点,谨供读者参考.

1 回顾2021年高考数学试卷(全国卷)中“函数与不等式”内容的试题

* **基金项目** 北京市教育学会“十三五”教育科研滚动立项课题“数学文化与高考研究”(课题编号FT2017GD003).

表 1　2021 年高考数学试卷(全国卷)中“函数与不等式”内容的试题

主题	次主题	必备知识	2021 年高考数学试卷(全国卷)中的相应试题
函数(不包括三角函数)	1. 函数的概念与性质	(1) 函数概念:(ⅰ)函数的要素(定义域、对应关系、值域);(ⅱ)函数的表示法(如图象法、列表法、解析法等);(ⅲ)分段函数	甲卷文科第 6 题即理科第 4 题(表示法,数学文化试题),新高考卷 1 第 7 题(由函数图象求参数的取值范围),新高考卷 2 第 14 题(表示法),甲卷第 23(1)题(画函数图象),甲卷第 23(2)题(由函数图象的平移求参数的取值范围),乙卷第 23(1)题(解绝对值不等式),乙卷第 23(2)题(由绝对值的几何意义求解恒成立问题)(甲卷、乙卷第 23 题文科与理科均同题且均涉及绝对值,其本质是分段函数,是“选修 4-5:不等式选讲”的选考题)
		(2) 函数性质:(ⅰ)函数的单调性与最值;(ⅱ)函数的奇偶性	甲卷文科第 4 题(单调性),乙卷文科第 8 题(最值),乙卷文科第 9 题即理科第 4 题(奇偶性),新高考卷 1 第 13 题(奇偶性),新高考卷 2 第 8 题(奇偶性),新高考卷 2 第 14 题(奇偶性),甲卷文科第 12 题及理科第 12 题(奇偶性、对称性(其特殊情形是奇偶性)、周期性的综合应用,详见后文题 6)
	2. 幂函数、指数函数、对数函数	(1) 幂函数	甲卷文科第 4 题,新高考卷 1 第 13 题,甲卷理科第 21 题,乙卷文科第 21 题
		(2) 指数函数	甲卷文科第 4 题,乙卷文科第 8 题,新高考卷 1 第 7 题,新高考卷 1 第 13 题,新高考卷 2 第 16 题,甲卷理科第 21 题,新高考卷 2 第 22 题
		(3) 对数函数	新高考卷 2 第 7 题,乙卷文科第 8 题,新高考卷 1 第 15 题,甲卷文科第 20 题,乙卷理科第 20 题,新高考卷 1 第 22 题
	3. 函数的应用	(1) 函数零点、二分法与求方程近似解	甲卷理科第 21(2)题,乙卷文科第 21(2)题,新高考卷 2 第 22(2)题(这三道题均是函数零点问题)
		(2) 函数与数学模型	甲卷文科第 6 题即理科第 4 题
	4. 不等式	(1) 不等式的性质	甲卷文科、理科第 1 题及新高考卷 1 第 1 题(均以集合为载体),乙卷文科第 3 题(即理科第 3 题,以命题与逻辑联结词为载体),乙卷文科第 5 题(线性规划),新高考卷 2 第 7 题(以对数为载体)
		(2) 基本不等式	乙卷文科第 8 题,新高考卷 1 第 5 题(以椭圆为载体)
		(3) 一元二次不等式	乙卷文科第 8 题
导数(包括三角函数)	1. 导数的概念及其意义	(1) 平均变化率与瞬时变化率	没有直接考查该知识的高考题
		(2) 极限	
		(3) 导数的几何意义	甲卷理科第 13 题,新高考卷 1 第 7 题,新高考卷 2 第 16 题,乙卷文科第 21(2)题
	2. 导数的运算	(1) 基本初等函数的导数	甲卷文科第 20 题,理科第 13、21 题;乙卷文科第 12、21 题,理科第 10、12、21 题;新高考卷 1 第 7、15、22 题;新高考卷 2 第 14、16、22 题
		(2) 导数的四则运算法则及复合函数的求导法则	
	3. 导数在研究函数中的应用	(1) 用导数研究函数的单调性	乙卷理科第 12 题,甲卷文科第 20(1)题,甲卷理科第 21(1)题,乙卷文科第 21(1)题,乙卷理科第 21(2)题(用单调性证明函数不等式),新高考卷 1 第 22(1)题,新高考卷 2 第 22(1)题
		(2) 用导数研究函数的极值与最值	乙卷文科第 12 题即理科第 10 题(极值),新高考卷 1 第 15 题(最值),乙卷理科第 21(1)题(极值),甲卷文科第 20(2)题(用导数研究函数的零点问题,进而求参数的取值范围),甲卷理科第 21(2)题(用导数研究两条曲线的公共点问题(其本质是函数的零点问题),进而求参数的取值范围),乙卷文科第 21(2)题(求两个函数图象的公共点坐标,其本质是函数的零点问题),新高考卷 1 第 22(2)题(不等式中的极值点偏移问题),新高考卷 2 第 22(2)题(用导数研究函数的零点,结构不良问题)

由表 1 不难看出,2021 年高考数学试卷(全国卷)中"函数与不等式"内容的试题有以下规律:

(Ⅰ)6 套全国卷的试题考查全面,几乎涵盖了"函数与不等式"内容的所有知识点;

(Ⅱ)函数的单调性是必考内容,考查函数的奇偶性的试题较多,涉及幂函数、指函数、对数函数等基本初等函数的试题也较多;

(Ⅲ)有不少试题涉及抽象函数,比如甲卷文科第 12 题,甲卷理科第 12 题,新高考卷 2 第 14 题;

(Ⅳ)两道"选修 4-5:不等式选讲"的选考题很相似,题干都涉及函数 $f(x)=|ax+b|\pm|cx+d|$(其解法都是通过实数绝对值的意义及分类讨论先把绝对值符号去掉),第(2)问都是由不等式恒成立求参数的取值范围.

2 展望 2022 年高考数学试卷(全国卷)中"函数与不等式"内容试题的特点

2.1 试题紧密联系课本

题 1 (1)(2020 年高考全国卷 Ⅰ 文科第 8 题)设 $a\log_3 4=2$,则 $4^{-a}=$( ).

A.$\frac{1}{16}$ B.$\frac{1}{9}$ C.$\frac{1}{8}$ D.$\frac{1}{6}$

(答案:B)

(2)(2021 年高考天津卷第 7 题)若 $2^a=5^b=10$,则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$( ).

A.-1 B.lg7 C.1 D.$\log_7 10$

(答案:C)

评注 第(1)小题源于普通高中教科书[2]第 127 页第 5 题,也源于上一轮教材普通高中课程标准实验教科书[3]第 75 页 B 组第 1 题,该题是巩固对数定义("指对互化")、对数运算性质、对数恒等式及幂的运算性质的好题.第(2)小题源于教科书[3]第 83 页 B 组第 2 题:若 $2^a=5^a=10$,则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=$______.

题 2 (2013 年高考新课标卷 Ⅰ 文科第 12 题即理科第 11 题)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, x\leqslant 0,\\ \ln(x+1), x>0,\end{cases}$ 若 $|f(x)|\geqslant ax$,则 a 的取值范围是( ).

A.$(-\infty,0]$ B.$(-\infty,1]$

C.$[-2,1]$ D.$[-2,0]$

(答案:D)

评注 解答这道选择题时,要用到教科书[2]第 154 页的叙述:"对数增长""直线上升""指数爆炸"(教科书[3]第 111 页也有同样的叙述).

2.2 关于基本不等式的选填题,解答有技巧

题 3 (2007 年高考北京卷理科第 7 题)如果正数 a,b,c,d 满足 $a+b=cd=4$,那么( ).

A.$ab\leqslant c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

B.$ab\geqslant c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

C.$ab\leqslant c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

D.$ab\geqslant c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

(答案:A)

评注 对于"字母都取正数"的题目就应当想到用基本不等式求最值,往往简便快捷,但适用面比较狭窄;用导数求函数最值时,适用面更广泛.当然,在基本不等式"若 $a>0,b>0$,则 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$"中,可设 $b=ax^2(x>0)$,得 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\Leftrightarrow\frac{1+x^2}{2}\geqslant x\Leftrightarrow(x-1)^2\geqslant 0$,说明均值不等式与结论"一元函数 $f(t)=t^2(t\in\mathbf{R})$ 的函数值非负"是等价的,这可能也是"基本不等式"名称的来历吧.

关于基本不等式的试题还可能以应用题的形式出现,考生要注重文字阅读能力的培养及审题基本功的训练.

2.3 在分段函数中求参数的取值范围

分段函数的解析式由分类讨论的形式呈现,相对于解析式单一的情形要复杂些,但在每份高考试卷中几乎都有有关分段函数的试题,因而考生务必重视.其常见的处理策略是"分段讨论"及"分类讨论".

题 4 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$,若函数 $f(x)=\begin{cases}(a-1)x+3a-4, x\leqslant 0,\\ a^x, x>0\end{cases}$ 满足对任意实数 $x_1\neq x_2$,都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ 成立,则 a 的取值范围是( ).

A.$(0,1)$ B.$(1,+\infty)$

C.$\left(1,\frac{5}{3}\right]$ D.$\left[\frac{5}{3},2\right)$

(答案:C)

题 5 (2015 年高考北京卷理科第 14 题)设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, x<1,\\ 4(x-a)(x-2a), x\geqslant 1.\end{cases}$

① 若 $a=1$,则 $f(x)$ 的最小值为______;

② 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点,则实数 a 的取值范围

是______.

$\left(答案:① -1;② \left[\frac{1}{2},1\right) \cup [2,+\infty).\right)$

评注　解答题4时要理解函数单调性定义的等价及解决分段函数单调性的通法;解答题 5 的关键是进行恰当的分类讨论,即找到合适的分类讨论标准.

2.4　关于函数图象对称性与周期性的综合问题常在选填压轴题中出现

题 6　(1)(2021 年高考全国甲卷文科第 12 题)设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,且 $f(1+x)=f(-x)$,若 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$,则 $f\left(\frac{5}{3}\right)=(\quad)$.

A. $-\frac{5}{3}$　B. $-\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{5}{3}$

(答案:C)

(2)(2021 年高考全国甲卷理科第 12 题)设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(x+1)$ 为奇函数,$f(x+2)$ 为偶函数,当 $x\in[1,2]$ 时,$f(x)=ax^2+b$.若 $f(0)+f(3)=6$,则 $f\left(\frac{9}{2}\right)=(\quad)$.

A. $-\frac{9}{4}$　B. $-\frac{3}{2}$　C. $\frac{7}{4}$　D. $\frac{5}{2}$

(答案:D)

(3)(2021 年新高考全国卷 2 第 8 题)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(x+2)$ 为偶函数,$f(2x+1)$ 为奇函数,则(　　).

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　B. $f(-1)=0$

C. $f(2)=0$　D. $f(4)=0$

(答案:B)

评注　还可证得题 6 的一般情形的结论:

(1)若曲线 $y=f(\alpha x+\beta)(\alpha\neq 0)$ 关于点 (a,c) 对称,曲线 $y=f(\gamma x+\delta)(\gamma\neq 0)$ 关于直线 $x=b$ 对称,则 $f(2\alpha a+2\beta-x)+f(x)=2c$,$f(2\gamma b+2\delta-x)=f(x)$,$f(x+4(\alpha a+\beta-\gamma b-\delta))=f(x)$.

当 $\alpha a+\beta=\gamma b+\delta$ 时,$f(x)\equiv c$;

(2)若曲线 $y=f(\alpha x+\beta)(\alpha\neq 0)$ 关于两点 (a,c),(b,c) 均对称,则 $f(2\alpha a+2\beta-x)+f(x)=2c$,$f(2\alpha b+2\beta-x)+f(x)=2c$,$f(x+2\alpha(a-b))=f(x)$;

(3)若曲线 $y=f(\alpha x+\beta)(\alpha\neq 0)$ 关于两条直线 $x=a$,$x=b$ 均对称,则 $f(2\alpha a+2\beta-x)=f(x)$,$f(2\alpha b+2\beta-x)=f(x)$,$f(x+2\alpha(a-b))=f(x)$.

2.5　考查函数最重要的性质——单调性

函数单调性的含义:在区间 I 上,当自变量的值增加时,对应的两个函数值增加(减少),该函数在区间 I 上就是增(减)函数.

用导数判断函数单调性的法则:函数 $f(x)$ 在区间 I 上是增函数(减函数)的充要条件是 $\forall x\in$ 区间 I,$f'(x)\geqslant(\leqslant)0$,且当 $f'(x)=0$ 时,x 不会在任意区间上取值(即只可能取到一些孤立的点).

处理函数单调性问题的常见策略就是用导数这一有力工具.

题 7　(2016 年高考全国卷 Ⅰ 文科第 21 题)已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $f(x)$ 有两个零点,求 a 的取值范围.

分析　求函数的单调区间的一般步骤是:写定义域→求导→求导函数零点→列表→下结论.其中列表反映的信息最清楚也最全面、最简洁.

(1)函数 $f(x)$ 的的定义域是 $\mathbf{R}$.可得 $f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln(-2a)$ 或 1.

因为当且仅当 $a<0$ 时 $\ln(-2a)$ 才有意义,所以须分 $a<0$ 和 $a\geqslant 0$ 两类情形来讨论.当 $a<0$ 时,$\ln(-2a)$ 有意义,接下来还须分 $\ln(-2a)>1$,$\ln(-2a)=1$,$\ln(-2a)<1$(即 $a<-\frac{e}{2}$,$a=-\frac{e}{2}$,$-\frac{e}{2}<a<0$)三种情形来讨论.

(2)为了得到函数 $f(x)$ 的零点个数,就需要知道其图象的形状,还需要知道函数 $f(x)$ 的单调区间,从而由第(1)问的分类讨论标准可确立第(2)问的分类讨论标准:分 $a<-\frac{e}{2}$,$a=-\frac{e}{2}$,$-\frac{e}{2}<a<0$,$a=0$,$a>0$ 这五种情形讨论(因为后两种情形 $f(x)$ 的单调区间不同,所以这两种情况须分开讨论).

2.6　重点考查函数的极值与最值

极值是函数的局部性质:函数图象的"每座山峰"的纵坐标都是极大值,"每处山谷"的纵坐标都是极小值;而最值是函数的整体性质,闭区间上函数的最大(小)值是所有极大(小)值与两个端点函数值中的最大(小)者.求有关极值、最值的解答题时,表述时要尽可能列表,因为这样更清楚明白.

题 8　(1)比较大小(直接写出答案):

3^{10} ______ 10^3;

(2)求出 $e^3,3^e,e^\pi,\pi^e,3^\pi,\pi^3$ 中的最大者与最

小者.

解 (1) 由“指数爆炸”可猜测 $3^{10} > 10^3$,验证如下:$3^{10} > 3^7 = 2187 > 1000 = 10^3$.

(2) 由(1)的解答可猜测 $e^3 > 3^e, e^\pi > \pi^e, 3^\pi > \pi^3$(后面会验证它们均成立),所以 $\max\{e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3\} = \max\{e^3, e^\pi, 3^\pi\}$, $\min\{e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3\} = \min\{3^e, \pi^e, \pi^3\}$.

还可得 $e^3 < e^\pi < 3^\pi, 3^e < \pi^e < \pi^3$,所以 $\max\{e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3\} = 3^\pi$, $\min\{e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3\} = 3^e$.

下面证明“若 $e \leqslant a < b$,则 $a^b > b^a$”,即证 $\ln a^b > \ln b^a$, $\frac{b\ln a}{ab} > \frac{a\ln b}{ab}$, $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$.

设函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}(x > e)$,可求得 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0(x > e)$,所以 $f(x)$ 是增函数,进而可得 $g(x) = \frac{\ln x}{x}(x \geqslant e)$ 也是增函数,所以 $g(a) > g(b)$,即 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$.

综上所述,可得 $\max\{e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3\} = 3^\pi$, $\min\{e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3\} = 3^e$.

评注 $y = \frac{\ln x}{x}$ 是一个有代表性的函数,下面六道高考题都涉及到它:2017 年全国卷 Ⅰ 理科第 11 题,2014 年高考湖北卷文科、理科第 22 题,2005 年高考全国卷 Ⅲ 理科第 6 题,2001 年高考全国卷理科第 20 题,1983 年高考全国卷理科第 9 题.

2.7 函数零点问题依然是重要题型

函数的零点是函数图象与横轴公共点的横坐标.零点问题备受高考命题专家青睐,其处理策略常涉及由单调区间画出函数图象及用分类讨论思想来求解.

请注意,证明函数存在零点时,或直接求出零点,或由零点存在定理(当函数在开区间 I 上连续不断且在两个端点的函数值异号时,该函数在开区间 I 上的图象必穿过横轴)证明函数存在零点,不可仅由图象代替严格证明.

题 9 (2016 年高考北京卷文科第 20 题)设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a = b = 4$,若函数 $f(x)$ 有三个不同的零点,求 c 的取值范围;

(3) 求证:$a^2 - 3b > 0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

评注 该题第(2)问的解答:须由零点存在定理证明函数存在零点,不可先由三次函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的图象得出 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,再得出第(2)问的结论;由第(2)问的结论可构造出第(3)问的结论中关于“不充分条件”的实例.

2.8 函数不等式是难度较大的题目

2.8.1 不等式恒成立、能成立、恰成立问题在选填题中频繁出现

由所给不等式恒成立、能成立、恰成立求参数取值范围的三类问题,既有区别又有联系,容易混淆,考生要熟练掌握.

题 10 若关于 x 的不等式 $1^x + 2^x + 3^x + \cdots + (n-1)^x + n^x a > 0$($n > 1$, n 是已知的整数)恰在 $x < 1$ 时成立,则实数 a 的取值范围是______.

解 可得题设即关于 x 的不等式 $\left(\frac{1}{n}\right)^x + \left(\frac{2}{n}\right)^x + \left(\frac{3}{n}\right)^x + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^x > -a$ 的解集为 $(-\infty, 1)$.

由结论“若干个减函数之和也是减函数”,可得 $f(x) = \left(\frac{1}{n}\right)^x + \left(\frac{2}{n}\right)^x + \left(\frac{3}{n}\right)^x + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^x (x \in \mathbf{R})$ 是减函数,所以 $x \in (-\infty, 1) \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow -a = f(1) \Leftrightarrow a = \frac{1-n}{2}$,因而所求实数 a 的取值范围是 $\left\{\frac{1-n}{2}\right\}$.

评注 若将题 10 中的“$x < 1$”改为“$x \leqslant 1$”,则所求答案是 $\varnothing$.

2.8.2 双参数问题可能出现

题 11 已知 $a > 1$,函数 $f(x) = (x^2 + ax + 1)e^{1-x}$, $g(x) = \frac{2a - 1 + (2a-1)x - x^2}{x+1}$ 满足 $\forall x_1 \in [0,1]$, $\exists x_2 \in [0,1]$,使得 $f(x_1) \geqslant g(x_2)$,求实数 a 的取值范围.

答案:$\left(1, \frac{2e+3}{4}\right]$.

评注 解答双参数问题时,可先把其中的一个参数(比如是 x_1)看作常数变成另一个参数(x_2)的问题,求得参数 x_1 满足的条件,变成了一个参数 x_1 的问题,最终可完成求解.具体求解时,先视哪一个参数为常数,可能解答的难度不一样.

2.8.3 用导数证明函数不等式的四种常用方法

单调性法、求最值、分别求不等式两边的最值(比如2014年高考课标全国卷Ⅰ理科第21(2)题)、寻求过渡(比如2013年高考新课标全国卷2理科第21(2)题)是用导数证明函数不等式的四种常用方法[4],考生要尽可能地掌握这种解题技巧.

2.9　求参数取值范围问题常考常新

题 12　(2020年新高考全国卷Ⅰ第21题)已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

(1)当 $a=e$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2)若 $f(x)\geqslant 1$,求 a 的取值范围.

评注　下面用指数对数恒等式 $x=e^{\ln x}$ 给出第(2)问的一种简洁解法[5]:

可得题设即 $e^{\ln a+x-1}+(\ln a+x-1)\geqslant e^{\ln x}+\ln x$.

还可得 $g(t)=e^t+t$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,所以题设即 $\ln a+x-1\geqslant\ln x$,也即 $(x-\ln x-1)_{\min}\geqslant-\ln a$.

用导数知识,可求得 $(x-\ln x-1)_{\min}=0$,进而可求得所求 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

题 13　已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln(x+1)}{x}$,$g(x)=x-1-\ln(x+1)$.若当 $x>0$ 时,$xf(x)>kg'(x)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 恒成立,求 k 的最大值.

解法 1　我们可以考虑用分离参数法来求解.

可得题设即 $\dfrac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}>k(x>0)$ 恒成立.

设 $h(x)=\dfrac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}(x>0)$,可求得 $h'(x)=\dfrac{x-1-\ln(x+1)}{x^2}(x>0)$.

用导数可证得 $u(x)=x-1-\ln(x+1)$ 是增函数,再由 $u(2)<0<u(3)$ 可知存在唯一的 $x_0\in(2,3)$,使得 $x_0=1+\ln(x_0+1)$.进而可得:当且仅当 $x=x_0$ 时,$h(x)_{\min}=h(x_0)=(x_0+1)\cdot\dfrac{1+\ln(x_0+1)]}{x_0}=x_0+1$.

又因为 $x_0+1\in(3,4)$,所以 $k\leqslant 3(k\in\mathbf{N}^*)$,故所求整数 k 的最大值是3.

解法 2　不用分离参数法而用分类讨论思想来求解.

设 $h(x)=(x+1)[1+\ln(x+1)]-kx(x>0)$,可得题设即 $h(x)>0(x>0)$ 恒成立.接下来需要求函数 $h(x)$ 的最小值或下确界 $\alpha(k)$,再解不等式 $\alpha(k)>0$ 即可得到 k 的取值范围.

可求得 $h'(x)=\ln(x+1)+2-kx(x>0)$.

(ⅰ)当 $k\leqslant 2$ 时,可得 $h'(x)>0(x>0)$,$h(x)$ 是增函数.再由 $h(0)=1-k$,可得题设即 $1-k\geqslant 0$,也即 $k\leqslant 1$.

(ⅱ)当 $k>2$ 时,可得 $h(x)$ 在 $(0,e^{k-2}-1]$,$[e^{k-2}-1,+\infty)$ 上分别是减函数、增函数,所以 $h(x)_{\min}=h(e^{k-2}-1)=-[e^{k-2}-(k-2)-2](x>0)$,进而可得题设即 $e^{k-2}-(k-2)-2<0$.

可证得函数 $u(x)=e^x-x-2(x>0)$ 是增函数.

又因为 $u(1)<0$,$u(2)>0$,所以函数 $u(x)$ 的唯一零点 $\alpha\in(1,2)$.因而 $e^{k-2}-(k-2)-2<0\Leftrightarrow k-2<\alpha\Leftrightarrow k<\alpha+2$.

综上所述,可得所求整数 k 的最大值是3.

解法 3　"先必要后充分"法.设 $h(x)=\dfrac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}(x>0)$,可得题设即 $h(x)>k(x>0)$ 恒成立.

可得 $e>2.5>\sqrt{6}$,$e^5>e^4>36>27$,$5>3\ln 3$,$1+\ln 3<\dfrac{8}{3}$,所以 $h(2)=\dfrac{3}{2}(1+\ln 3)<4$.

由 $h(x)>k(x>0)$ 恒成立,得 $4>h(2)>k(k\in\mathbf{Z})$,所以 $k\leqslant 3$.

还可用导数证得 $h(x)>3(x>0)$ 恒成立(过程略).

所以所求整数 k 的最大值是3.

评注　题13的三种解法均是解答求参数取值范围问题的通性通法:解法1是"分离参数+隐零点(设而不求)";解法2也是常规方法,但解不等式 $\alpha(k)>0$ 很可能出现僵局、难以继续(但可尝试用分类讨论思想来解决);解法3是"先必要后充分"的转化方法(不同于直接的等价转化).在解法3中"令 $x=2$"有试验的成分(试验一次就得到了与正确答案相关的必要条件),这种"先必要后充分"的解题方法也属通性通法.

读者由这三种解法均可完成2012年高考新课标全国卷文科第21(2)题的解答.

2.10　试题的亮点是创新

解答2019年高考全国卷理科第20(2)题"证明:函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$ 有且仅有2个零点"的核心问题是"证明不等式 $\sin x>\ln(x+1)\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$".早在2017年3月出版的拙著[6]第185-186页就给出了该不等式及其证明.

用几何画板电脑软件容易作出一些简单的函数

(包括基本初等函数)图象,进而可得出相应的函数不等式,这就是笔者发现该不等式的缘由.

近日,笔者用同样的方法还得到了下面的一道题目:

题 14 已知函数 $f(x)=x\sin x(0<x<\pi)$,求证:$f(x)<2$.

证明 (1)当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,由 $y=x$ 与 $y=\sin x$ 均是增函数且函数值均是正数,用函数单调性的定义或用导数均可证得 $f(x)$ 也是增函数,所以 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}<2$.

(2)当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时,可求得 $f'(x)=\cos x(\tan x+x)$.

可得 $g(x)=\tan x+x\left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$ 是增函数.再由 $g\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-2-\sqrt{3}+\frac{7\pi}{12}<-2-1.7+\frac{7}{12}\times 3.6=-1.6<0$,$g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}>2-\sqrt{3}>0$ 及 $g(x)$ 是连续函数,可得 $\exists t\in\left(\frac{7\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right)$,$g(t)=0$,因而 $\tan t+t=0$,$\sin t=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.

进而可求得 $f(x)_{极大值}=f(t)=t\sin t=\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$,所以欲证 $f(x)<2$,即证 $\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}<2$,$t^4-4t^2-4<0$,$t^2<2+2\sqrt{2}(2+2\sqrt{2}>4.8)$.

因而只需证明当 $t\in\left(\frac{7\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right)$ 时 $t^2<4.8$,即证 $\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2<4.8$,$\pi^2<4.8\times\frac{9}{4}$,$\pi^2<10.8(10.8>10.24=3.2^2)$,所以只需证明 $\pi^2<3.2^2$,$\pi<3.2$,它成立,所以欲证结论成立.

综上所述,可得欲证结论成立.

评注 高考试题的亮点是创新,但结论应当简洁.高三学生在复习备考时,也可尝试以上创新方法:留意一些简单的函数图象形状,再严格证明相应的结论,这也是一种高效的研究性学习.

另外,高考数学全国卷的必做题压轴题往往是函数与导数,难度较大.拙著[7]详细阐述了考生解答该题时出现的八大"困惑"及其突破方法,学有余力的学生可以研读.

2.11 多项选择题、数学文化试题及结构不良问题是近年高考试题的热点

读者还应注意有关抽象函数与绝对值函数问题的解法,虽说它们在近年的高考题中不是高频考点,但基础好的考生也要留意并作好充分准备.另外,涉及函数与不等式的多项选择题、数学文化试题[8]及结构不良问题(比如 2021 年新高考全国卷 2 第 22 题)也是近年高考试题的热点.结构不良问题较结构良好问题多了一项考查功能,即考查考生对选项难易度的甄别及对所求问题进行合理搭配再完成求解的能力.

关于高三数学复习备考策略,在笔者发表的文章中已阐述较多,比如拙文[9]及其文末列出的参考文献,有兴趣的读者可以浏览.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020.

[2] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中教科书(数学·必修·第一册·A 版)[M].北京:人民教育出版社,2019.

[3] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书(数学 1·必修·A 版)[M].北京:人民教育出版社,2007.

[4] 甘志国.用导数证明函数不等式的 4 种常用方法[J].高中数理化,2018(03):6-8.

[5] 甘志国.用指数对数恒等式 $x=e^{\ln x}$ 简便解题[J].高中数学教与学,2020(05):7-9.

[6] 甘志国.2016 年高考文科数学真题研究[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.

[7] 甘志国.2017 年高考理科数学真题研究[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018:285-311.

[8] 甘志国.数学文化与高考研究[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.

[9] 甘志国.谈谈高中数学教学的四个关键词:夯实基础、激发兴趣、着眼高考、适当提高[J].中学数学杂志,2019(09):16-21.

作者简介 甘志国(1971—),正高级教师,特级教师;对高考数学试题及强基计划数学试题研究较多.