



培养具有创新思想和良好思维品质的数学人才

——一道 2022 年高考数学试题的启示

曲阜师范大学期刊中心 273165 张召生 韩红梅

【摘要】 2022 年北京高考数学卷第 21 题是一道完全不同于其他全国高考试题的数学情景题,试题和试题求解体现了数学学科特点.通过深度分析此考题,提出培育学生数学思维和能力的教学建议.

【关键词】 高考; m -连续可表数列;数学思想;数学思维;数学学科特点

2022 年教育部统一命制 6 套高考数学试卷:全国甲卷 2 套(文、理科)、全国乙卷 2 套(文、理科)、新高考 I 卷 1 套(不分文理科)、新高考 II 卷 1 套(不分文理科).各套试卷都重视情景设计题的命制,如新高考 I 卷第 4 题以我国重大建设成就“南水北调”工程为情景;新高考 II 卷第 3 题以中国古代建筑中的举架结构为情景;全国甲卷理科第 8 题以《梦溪笔谈》中沈括研究的圆弧长计算方法“会圆术”为情景;全国甲卷文、理科第 2 题以社区环境建设中“垃圾分类”为情景;全国乙卷文、理科第 19 题以生态环境建设为情景;全国乙卷理科第 4 题以嫦娥二号卫星在完成探月任务后继续进行深空探测为情景.但是,最特别的情景题是 2022 年北京高考数学试卷最后的压轴题第 21 题,是一道数学情景题,完全不同于其它全国高考数学试卷中的情景题,试题和试题求解充分体现了数学学科的特点.本文将研究这类数学情景题,并研究其对中学数学教育和高考备考的意义和作用,进而提出教学建议.

1 2022 年北京市高考数学试卷第 21 题

已知 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为有穷整数数列,给定正整数 m ,若对任意的 $n \in \{1, 2, \dots, m\}$,在 Q 中存在 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+j} (j \geq 0)$,使得 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+j} = n$,则称 Q 为 m -连续可表数列.

(1) 判断 $Q: 2, 1, 4$ 是否为 5-连续可表数列?

是否为 6-连续可表数列? 说明理由;

(2) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 8-连续可表数列,求证: k 的最小值为 4;

(3) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 20-连续可表数列,且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 20$,求证: $k \geq 7$.

第一问是判断,也是验证,只要正确理解了“ m -连续可表数列”的定义,根据定义就能验证是 5-连续可表数列而非 6-连续可表数列.但是,理解

“ m -连续可表数列”的定义事实上有一定的难度.

第二问是证明, k 的最小值为 4,即要先证明 $K \leq 3$ 时不满足题意,再证明 K 能取到 4. 第一步反证法,第二步用构造法证明存在性.

第三问是证明, $K \leq 5, K = 6$ 时,分别讨论此时结论不成立. 逻辑验证时,又分几类情况讨论,其过程充分地体现了分类和推理分析的思想方法.

第 21 题,以有穷整数数列为载体,定义了 m -连续可表数列,即数列要满足给定的性质或条件(2021 年北京高考卷也有类似的关于数列的新定义的一道压轴题. 这是北京高考数学试卷特色). 试题是一种数学情景题,构造了一种新的数学环境,在新的概念、新的运算、新的法则下去解决新问题. 试题求解过程中,数学抽象、构造、反证、分类、逻辑推理等思想方法渗透其中,即时学习、理解、掌握、应用等能力处处得到考查,创新性强,体现了数学学科特点,体现了开发人力、培育人才的作用和意义.

2 试题深度分析

2.1 完全不同于其他全国高考数学试卷中的情景试题

这类数学情景问题在全国其他高考试卷中未曾出现过,是一类新型的高考题. 全国高考数学试卷中的情景题一般是从社会、文化、体育、科技等非数学情景中抽象出数学问题,而不像这类情景题是新定义、新运算或者新数学系统等的情景,完全根据数学逻辑去解决问题.

这道数学情景题特征显著,试题的即时性、创新性、综合应用性特征非常明显. 解这类问题,学生需要首先阅读数学符号和认识新概念,对新情境新知识理解,即时学习、理解、领会并应用,从而解决问题. 即时性是它的突出特点,试题中即时定义数学新概念、新公式、新定理、新法则、新运算,对这些新的



数学知识,要求学生即时理解,即时应用,即时去分析问题和解决问题.学生要在较短时间内理解并学会新的知识,去解决相应问题.第二就是创新程度高.对学生,一切都是新的,基于这些新的知识去解决新问题.新知识的学习过程、运用知识解决问题的过程都是创新的过程,创新程度高.第三是综合性和应用性.在学习新知识的基础上,学生要运用各种已有知识和试题中给出的新知识结合自己掌握的知识,综合分析,综合运用,解决问题.

2.2 体现数学思想方法考查

从解题过程看,试题检测学生对新概念的理解和应用程度、数学思想方法的掌握和应用程度.本题考查了归纳与综合分析、特殊与一般、反证、分类、逻辑推理等思想.尤其是分类思想,分类情形中又有分类,分类较多、较复杂,多种情形分类,需要一步步地完成论证.第1问体现了一般与特殊、逻辑推理等思想;第2问体现了反证、分类、特殊与一般、逻辑推理等思想;第3问综合体现了分类、反证、归纳与综合分析、逻辑推理等思想.此题的解题过程充分体现了数学思想的运用,体现了数学学科的特点.若不能理解掌握这些思想方法并融会贯通,本试题的三问将不会得到完全解决.

2.3 体现数学六大核心素养考查

中学教育数学学科有六大核心素养:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析.本试题实现了对这六大核心素养的综合考查.第1问,主要考查学生首先理解新情境里的新概念,新概念实质也是一种模型,在理解的情形下验证一组特殊的具体的数列是否符合或不符合定义,理解了定义,就可以清晰地直观想象出数列中数字排列的规律和特点,其中,对定义的理解主要用到学生数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算等能力,验证过程则主要用到学生数据分析、逻辑推理、数学运算等综合能力;第2问、第3问需要学生综合运用数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析去推证结论.这三问中,在数学抽象基础上,学生需要理解概念模型,去数据分析、数学运算、逻辑推理和直观想象,因此,六大核心素养程度不同地有所考查.学生分析问题解决问题的过程就是六大素养的综合运用和充分体现的过程.一般六大素养很难在一个试题中同时被考查,因此,从这个意义上,这是一道很好的数学考试试题.

2.4 体现数学学科特点,回归数学本质

这种试题很好地考查了学生对新情境、新知识

的抽象理解,让学生在阅读数学符号和认识新概念的基础上,即时学习并创新应用,考查了学生获取新知识的能力和创新能力.这种试题设计思路就是在给定数学新概念后设计题目,要求学生综合运用数学逻辑、运算和思想方法等去解决问题.其中的各种情形的分类、运算、数据分析、逻辑推理、反证等,就像玩转魔方,用于分析、计算、验证,层层变化,时时变换,新颖、复杂、有难度、逻辑性强,体现了数学学科的特点,体现出数学思维特性,真正关注了数学本质,进而回归了数学本质.

3 教学启示

3.1 重视基础知识教育,回归教材教学和研究

从试题看,要求学生在理解新概念的基础上,综合运用各种所学的思想方法,发挥自己自主创新、自由发挥的主动性,调动自己的数学思维,去解决问题.靠刷题训练学生解题能力的做法在这种新情景题面前行不通了.所谓“万变不离其宗”,教材就是教师教学之“宗”,教材是许多专家、学者、一线教师和管理者潜心研究并结合学生认知水平编写的,是集合众多编者智慧的结晶,教材是学生所学知识的载体,是命制试题的源泉,是培养学生数学思想和核心素养的法宝,是培养学生德智体美劳全面发展的根本,因此,必须回归教材分析与研究,回归不刷题,回归《课标(2020修订版)》中“教学与评价案例”的研究与教学^[1],回归基础知识的学习和教育,整体上教育学生把握教材知识内容和思想方法,细节上教育学生会运用数学思维分析问题解决问题,学习和掌握解决问题的通性通法.教师教学中不能以题量为重点,要重点抓通性通法、思想方法的掌握和应用,扎实练习学生数学基本功,培养良好的数学思维,为学生今后的高校学习打下良好基础,培养出基础深厚的数学人才.

3.2 重视思想方法和核心素养教育,增强学生数学思维能力

从解题过程看,体现了教育学生掌握基本的数学思想方法的重要性,体现了核心素养教育的重要性.特殊与一般化、分类、模型、归纳、演绎、反证等思想方法都有考查,数据分析、数学抽象、数学运算、逻辑推理、数学建模、直观想象六大核心素养也在解题过程中有不同程度地考查.因此教师要认识到思想方法教育和核心素养教育的重要性,及时更新观念,加强和提高对数学思想方法和核心素养教育教学的认知和重视,深刻理解和把握数学思想方法和核心素养教育要求的层次,全面地培养学生的思想



方法意识,全面地提升学生六大核心素养.数学思想方法是数学的灵魂和生命,教师要在日常的课堂教学中注意教育学生将数学思想方法、数学思维方式内化成学生的数学素养.比如,训练学生熟练掌握基本数学思想方法如数形结合的思想、分类思想、化归思想、一般与特殊化思想、模型思想等,训练学生逻辑分析、逆向思维、发散思维和创造思维,训练学生的数学直觉感,训练学生的类比联想能力.通过这些方面的强化教学,增强学生数学思维能力,为高校输送高素养的数学人才.

3.3 重视学生分析问题和解决问题能力培养,增强学生解决问题的综合能力

第21题利用新定义和逻辑运算,很好地考查了学生即时学习、理解、掌握新知识的能力,综合考查了学生利用新知识分析问题、解决问题的能力,因此,教师日常教学时要重视分析问题、解决问题能力的教育与培养.比如训练学生数学思维的敏捷性、准确性,训练学生对试题描述的文字、语言、符号等信息加工和提取能力,训练学生使用各类方法解题,训练学生解题过程中不断探索思路和调整方法的能力,训练学生对新概念、新数学知识的学习能力、应用能力.其实,教师要明白,解题不在量,关键要教会学生分析试题的五种基本能力:通过试题条件,分析找出数学关系;透过试题文字描述,找出数学关系;通过未知条件,类比联想到可以求解的相似问题,找出它们之间的相关联系;通过已知问题,类比联想到要解决问题,发现它们之间的关联;通过试题信息如数字、运算、表达式、图形等显著特征,类比联想到其他的已知问题的解题策略、思路和方法,从而解决当前问题.教会学生分析问题解决问题是教师的根本任务,教师一定教会学生具备这种解决问题的数学能力,培养出分析问题解决问题能力优秀的真正的数学人才.

3.4 加强数学情景试题学习,提升学生创新能力

第21题是定义新概念后在给定的某种性质或满足某种条件下求证和求解一些问题.这种数学情景构造了新的数学元素,新的数学系统和环境,数学抽象性强.学生要答题,必须理解新定义、概念或运算等,即时理解相关知识点后综合应用各种知识解答问题.学生必须有学习新知识的能力和办法,必须有处理新问题的能力,必须有自主创新、自由发挥的能力.因此,平时要对学生加强数学情景试题方面的学习和训练,提升学生综合解决新问题的创

新能力.

那么,平时教学中,教师怎样构造这种数学情景的试题?教师应掌握的一种基本方法就是高等数学知识的下放或者简化的方法,比如,高等数学中数论、组合数学、数学规划、图论、高等代数、量子计算、凸函数凹函数等等相应内容的下放或简化.一是选取上述高等数学知识的简单内容、基础知识,得到试题;二是将这些知识在某些条件下特殊化或具体化,得到试题;三是给出上述内容的某个定义、某个规则,让学生解答相应问题.如,给出量子计算的定义,根据定义去做一些计算或求证一些问题;给出某些代数环、群的定义、性质,在某些条件下让学生给出例子或解答一些简单问题;等等.

近些年,高考试卷出现了高等数学观点下的数学试题,引起人们关注.陈美茹在“高等数学与高考‘谈恋爱’”一文中谈到了凹凸函数、矩阵和组合数学等高等数学知识的应用^[2].

就北京试卷而言,最近两年压轴题都是关于数列的,考查思想、考查原则、考查重点等都不同于全国其他试卷试题,然而,这类数学情景试题完美地考查了学生即时学习能力、即时综合应用能力和分析解决问题能力,试题有较大的推广价值,对中学数学教育和高考备考有较大的指导意义,所以,作者感觉,这一数学情景题命题模式明年还会在北京市高考试卷中出现,并且,近几年内将会在其它高考试卷中大概率地出现,建议中学教师重视这类试题教学,认真研究和挖掘这类题型对学生数学核心素养的教育价值和对学生数学思维品质和能力的培养价值,从而完善学生的数学品质,提升学生数学素养和作为国民的数学素质,培养国家需要的合格的数学人才.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 陈美茹.高等数学与高考“谈恋爱”[J].中学数学杂志,2014(05):47-51.

作者简介 张召生(1969—),男,山东曲阜人,曲阜师范大学期刊中心副主任;主要从事运筹学与控制论、中学数学教育、数学思想方法论研究.

韩红梅(1972—),女,山东郓城人;主要从事中学数学教育研究.