[11] Stein. M. K. 等. 实施初中数学课程标准的教学案例[M]. 李忠如, 译, 上海: 上海教育出版社, 2001: 3-26.

[12] 张维忠, 徐佩雯. 高中数学新教材中的数学建模[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2020, 43(03): 349-354.

[13] 李祎. 别被理念绑架教学[J]. 数学通报, 2019, 58(02): 18-20.

[14] 林风. 数学教学不能忽视教材"旁注"的作用与价值——以人教版高中数学教材必修4三角函数的诱导公式内容为例[J]. 福建教育, 2014(45): 51-53.

[15] 蒲淑萍, 汪晓勤. 数学史怎样融入数学教材: 以中、法初中数学教材为例[J]. 课程·教材·教法, 2012, 32(08): 63-68.

[16] 张维忠, 赵千惠. 澳大利亚初中数学教科书中的跨学科内容[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2022, 45(02): 233-240.

[17] 张辉蓉, 冉彦桃. STEAM教育理念落地: 数学文化项目学习模式构建及案例开发[J]. 中国电化教育, 2020(07): 97-103.

[18] 王勤, 余庆纯. 融入数学史的单元教学设计研究[J]. 中学数学教学参考, 2022(05): 69-72.

作者简介　邵诺愉(1999—), 女, 浙江舟山人, 浙江师范大学教师教育学院硕士研究生; 主要研究方向: 数学课程与教学论.

张维忠(1964—), 男, 甘肃天水人, 浙江师范大学教师教育学院教授; 主要研究方向: 数学课程与教学论.

扬"建型构模"之帆　启"直观想象"之航

——构造法与学生直观想象核心素养的培育

浙江省金华市外国语学校　321000　方　治

【摘　要】《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出, 直观想象核心素养是借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化, 利用空间形式特别是图形, 理解和解决数学问题的素养. 构造法是以数学问题中的条件或结论的结构特征为原件, 构造出全新的数学对象或模型, 将抽象的数学问题进行具象化处理. 本文从构造法与直观想象核心素养的相关性和适切度入手, 通过在教学中引领学生探究不同类型的图形构造策略来加强学生对数学内部不同知识板块的联系能力, 进一步提升学生的直观想象核心素养.

【关键词】　构造法; 高中数学教学; 直观想象核心素养

1　关于直观想象核心素养的论述

《普通高中数学课程标准(2017年版)》提到: 直观想象是数学学科六大核心素养之一, 它是借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化, 利用空间形式特别是图形, 理解和解决数学问题的素养. 它主要表现为建立形与数的联系、利用几何图形描述问题, 借助几何直观理解和解决问题[1]. 新课标对直观想象核心素养的达成水平作了三个层次的界定, 从低到高分别表现为在熟悉、关联以及综合的情境中, 借助图形认识、探索数学规律和提出数学问题, 通过想象对复杂的数学问题进行直观表达, 形成解决问题的思路和揭示数学问题的本质, 理解数学各分支以及数学与其它学科的联系, 体会几何直观的作用和意义. 数学家克莱因认为"数学不是依靠在逻辑上, 而是依靠在正确的直观上"[2]. 夸美纽斯和裴斯泰洛奇认为"直观就是未经充分逻辑推理而对事物本质的一种直接洞察, 就是直接把握对象的全貌"[3]. 我国数学家徐利治教授认为, "直观就是借助于经验、观察、测试或类比联想, 所产生的对事物关系直接的感知和认识, 而几何直观是借助于见到的或想到的几何图形的形象关系产生对数量关系的直接感知"[3].

2　构造法是培育直观想象核心素养的重要途径

构造法解题遵循相似性、熟悉性和直观性原则, 通过对题设条件或结论特征的仔细观察和认真分析, 进行相似性的想象和联想, 用不同的角度和思维方向构造新的数学对象或模型, 使原问题中条件和结论之间的数学关系在新对象或新模型中清晰体现出来, 从而简便直观地解决数学问题. 特别是在解决一些非几何直观的数学问题中, 若能有效地挖掘题目条件中的信息, 准确构造相应的几何直观, 就会为解决问题指明方向. 我国著名的数学家及数学教育家吴文俊院士曾经指出: "由于科学技术的快速发展, 构造性数学在不远的将来会出现新的发展, 甚至

成为数学的主流."[4] 直观想象核心素养三个层次水平的界定与构造法的解题原理有很高的相关性和适切度,所以构造法是培育学生直观想象核心素养的重要载体,教师在用构造法教学时,可以引导学生通过图象或者联系现实情境对数学对象进行不同角度的多元表征,从而更加直观地理解数学问题,在这样的过程中提升学生的直观想象核心素养.

3 执数构形向七度,直观想象见真章

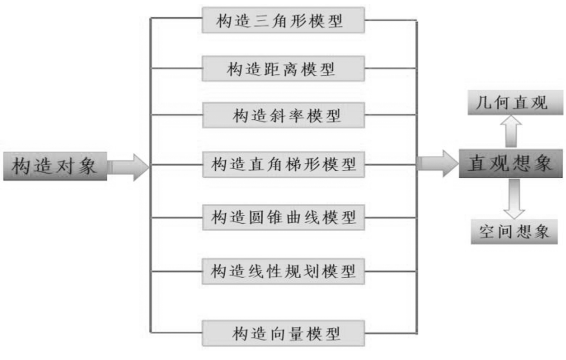

图 1

高中数学中构造策略和方法众多,本文的研究不求全而不漏,而是从构造法和直观想象核心素养的相关性和适切度入手,重在研究从代数形式上挖掘直观想象,代数形式与几何模型之间存在着特殊的"关系",因此将代数形式的特征与对应的几何模型的几何意义巧妙链接,就可以创造性地构造几何模型,利用模型的直观性来解决一些代数形式的问题,特别是最值问题等,往往能大幅度降低问题的难度.本文在建构主义理论、波利亚解题理论和多元智能理论的指引下,以高中数学教学为载体,从构造三角形、构造距离、构造斜率、构造直角梯形、构造圆锥曲线、构造线性规划以及构造向量七个维度展开教学实践研究,构建高中数学中数形转化的桥梁和纽带,使高中数学不同知识板块融为一体,为学生直观想象核心素养的提升创造更大的空间.

3.1 构造三角形模型

例 1 求下列式子的值:

(1) $\sin^2 67° + \sin^2 83° - \sqrt{3}\sin 67°\sin 83°$;

(2) $\sin^2 17° + \cos^2 62° + \sqrt{2}\sin 17°\cos 62°$;

(3) $\sqrt{2}\cos^2 67° + \sqrt{2}\cos^2 38° + (\sqrt{3}-1)\cdot\cos 67°\cos 38°$.

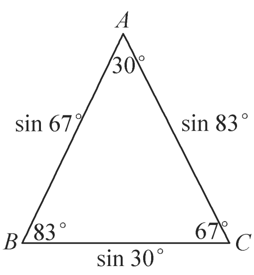

图 2

解 (1) 构造图 2,由余弦定理可知,$\sin^2 30 = \sin^2 67° + \sin^2 83° - \sqrt{3}\sin 67°\sin 83°$,即 $\sin^2 67° + \sin^2 83° - \sqrt{3}\sin 67°\sin 83° = \frac{1}{4}$;

(2) 利用诱导公式转化为 $\sin^2 17° + \sin^2 28° + \sqrt{2}\sin 17°\sin 28°$,构造图 3 可得,$\sin^2 135 = \sin^2 17° + \sin^2 28° + \sqrt{2}\sin 17°\sin 28° = \frac{1}{2}$;

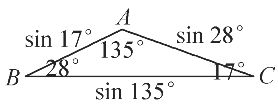

图 3

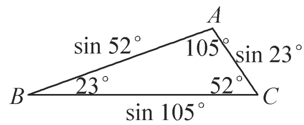

图 4

(3) 利用诱导公式和系数的处理变形为 $\sin^2 23° + \sin^2 52° + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\sin 23°\sin 52°$,即 $\sin^2 23° + \sin^2 52° - 2\sin 23°\sin 52°\cos 105°$,构造图 4 可得,$\sin^2 105° = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

例 2 设正实数 a,b,c 满足

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4, \\ a^2 + c^2 + ac = 7, \\ b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc = 11, \end{cases}$$ 求 $2ab + \sqrt{3}ac + bc$ 的值.

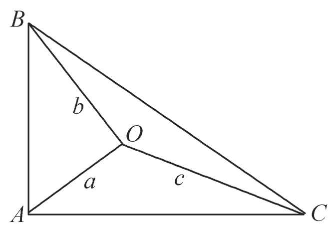

图 5

解 上述三元方程的三个方程的结构和三角形中的勾股或余弦定理很相似,所以可以构造如图 5 所示的三角形,OA,OB,OC 长度分别为 a,b,c,并且 $\angle AOB = 90°$,$\angle AOC = 120°$,$\angle BOC = 150°$,$AB = 2$,$AC = \sqrt{7}$,$BC = \sqrt{11}$,$2ab + \sqrt{3}ac + bc$ 中有 a,b,c 两两的乘积,所以可以考虑内部三个三角形的面积的和,即 $\frac{1}{2}ab + \frac{\sqrt{3}}{4}ac + \frac{1}{4}bc = \sqrt{7}$,故 $2ab + \sqrt{3}ac + bc = 4\sqrt{7}$.

设计意图 以上两个求值题的设计都是基于余弦定理的结构,它们可以放在正余弦定理的复习教学中使用,教师要引导学生通过适当的变形洞察出所求代数式的结构特征与余弦定理结构的一致性,然后构造三角形来解决.让学生在解法的比较中明晰构造三角形解题比其它常规解法的优势之处,也可以利用《数学必修第一册》(人教版 2019) 第 230 页习题 18 涉及的 $\sin^2 20° + \cos^2 50° +$

$\sin20°\cos50° = \frac{3}{4}$ 和 $\sin^2 15° + \cos^2 45° + \sin15°\cos45° = \frac{3}{4}$ 来引导学生构造类似的三角形来直观地解读等式背后的规律[5]，还可以请学生根据余弦定理的结构特征和以上问题的启发自己编制一些同类型的问题，以加深学生对余弦结构统一性的理解，数到形的直观转化推进了学生直观想象核心素养的提升.

3.2　构造距离模型

例 3　(1) 若方程 $m = \left|\sqrt{4-x^2} - 2x + 5\right|$ 有实数解，求实数 m 的取值范围；

(2) 若方程 $m = \left|\sqrt{4-3x^2} - 2x + 5\right|$ 有实数解，求实数 m 的取值范围.

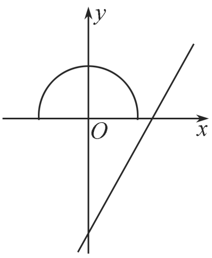

图 6

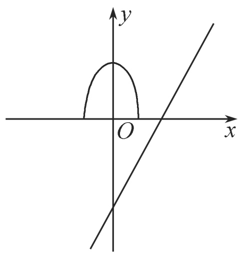

图 7

解　(1) 由题意得 $\frac{m}{\sqrt5} = \frac{\left|\sqrt{4-x^2} - 2x + 5\right|}{\sqrt5}$，把右边看作上半圆上的点 $(x, \sqrt{4-x^2})$ 到直线 $2x - y - 5 = 0$ 的距离. 所以据图 6 可知，实数 m 的取值范围是 $[1, 2\sqrt5 + 5]$.

(2) 由题意得 $\frac{m}{\sqrt5} = \frac{\left|\sqrt{4-3x^2} - 2x + 5\right|}{\sqrt5}$，把右边看作上半椭圆上的点 $(x, \sqrt{4-3x^2})$ 到直线 $2x - y - 5 = 0$ 的距离. 所以据图 7 可知，实数 m 的取值范围是 $\left[5 - \frac{4}{3}\sqrt3, 5 + \frac{2}{3}\sqrt{21}\right]$.

例 4　(1) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，方程 $\sqrt2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = a$ 有且只有一个实数根，求实数 a 的取值范围.

(2) 当 $x \in (0, \pi)$ 时，方程 $3\cos x + 4\sin x = a$ 有两个不同的实数根，求实数 a 的取值范围.

解　(1) 方程 $\sqrt2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = a$ 可化为 $\sin2x + \cos2x = a$，由于点 $(\cos2x, \sin2x)$ $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 在 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半圆上，故可构造 $x^2 + y^2 = 1$ 上半圆上的点 $(\cos2x, \sin2x)$ 到直线 $l: x + y - a = 0$ 的距离 d 来解决问题，方程 $\sqrt2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = a$ 等价于 $d = \frac{|\cos2x + \sin2x - a|}{\sqrt2} = 0$，问题转化为直线 $l: x + y - a = 0$ 与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上半圆只有一个交点，结合图 8 可知 $-1 \leqslant a < 1$ 或 $a = \sqrt2$.

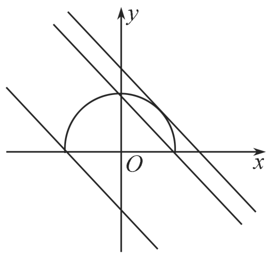

图 8

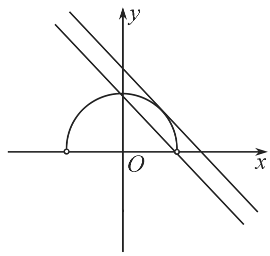

图 9

(2) 方程左边 $3\cos x + 4\sin x$ 变形后，辅助角不是特殊角，画三角函数的图象解决不太方便，根据(1)的解题思维，把问题转化为研究 $l: 3x + 4y - a = 0$ 与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上半圆有两个不同的交点，结合图 9 可得 $3 < a < 5$.

设计意图　以上两个求取值范围问题的设计都是基于点到直线的距离结构，把函数与方程和解析几何知识融合在一起，可以放在高三的复习教学中使用，教师要引导学生通过适当的变形洞察出所求代数式的结构特征与点到直线的距离结构的一致性，然后构造直线与圆锥曲线的位置关系加以解决，让学生在解法的比较中明晰构造距离解题比其它常规解法的优势之处，还可以请学生自主编制其它的距离和相应图形构成的问题，以开阔学生的视野和境界，提升学生由数思形的直观想象核心素养.

3.3　构造斜率模型

例 5　(1) 已知 $x < 1$，求函数 $f(x) = \frac{x^2 + 9x - 9}{x - 1}$ 的最大值.

(2) 已知 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，比较 $\frac{3 - \sin x}{\sqrt3 - \cos x}$ 和 $\tan x$ 的大小关系.

解　(1) 由于 $f(x)$ 可变形为 $\frac{(x^2 + 9x) - 9}{x - 1}$，此结构和斜率结构相似，构造点 $Q(x, x^2 + 9x)$ 和点 $P(1, 9)$，PQ 连线的斜率即为 $f(x)$，点 $Q(x, x^2 + 9x)$ 在抛物线弧 $y = x^2 + 9x (x < 1)$ 上运动，由图 10 可知，过点 $P(1, 9)$ 与抛物线相切时直线的斜率最大即

为 $f(x)$ 的最大值,易得 $f(x)$ 的最大值为 9.

(2) 构造点 $M(\cos x,\sin x)$ 和点 $N(\sqrt{3},3)$,直线 MN 的斜率即为 $\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}-\cos x}$, 点 $M(\cos x,\sin x)$ $\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 在圆弧 $x^2+y^2=1(x>0,y>0)$ 上运动,$\tan x=\frac{\sin x-0}{\cos x-0}$为点 $M(\cos x,\sin x)$ 与原点连线的斜率,由图 11 直观可知:当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时,有 $\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}-\cos x}>\tan x$,当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,有$\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}-\cos x}=\tan x$,当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 时,有$\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}-\cos x}<\tan x$.

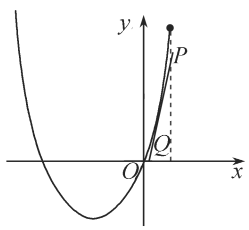

图 10

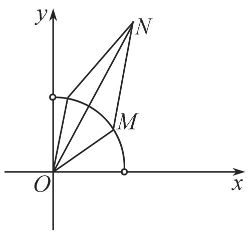

图 11

设计意图　以上求最值和判断大小关系的两个问题的设计都是基于斜率结构,它们把函数、不等式和解析几何知识融为一体,可以放在高二的复习教学中使用,教师要引导学生联想到已知代数式的结构特征与斜率结构的一致性,然后构造定点与曲线上动点连线的斜率变化加以解决,让学生在解法的比较中明晰构造斜率解题比其它常规解法的优势之处,以加强学生代数结构引导直观思考的意识和能力,凝炼学生的直观想象核心素养.

3.4　构造直角梯形模型

例 6　两角和的正弦、余弦和正切公式的几何直观解释.

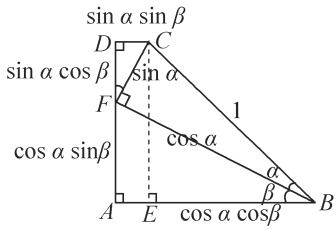

图 12

图 12 给出了 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 和 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 的一个几何直观解释,在事先假设 $BC=1$,$\angle FBA=\beta$,$\angle FBC=\alpha$ 的前提下,图中各线段的长度可以依次表示出来 $BE=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,$CE=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

图 13 给出了 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 的一个几何直观解释,在事先假设 $AB=1$,$\angle FBA=\beta$,$\angle FBC=\alpha$ 的前提下,图中各线段的长度可以依次表示出来.

$BE=1-\tan\alpha\tan\beta$,$CE=\tan\alpha+\tan\beta$,故 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{CE}{BE}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

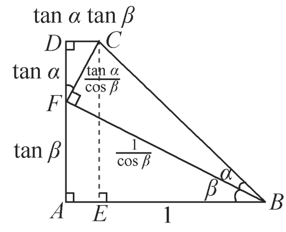

图 13

设计意图　将数学命题、公式或者定理用简单、有创意且易于理解的几何图形呈现出来,不仅可以给数学命题、公式或者定理一个直观的解释,而且给学生以美的享受.其实在不等式的教学中也有关于基本不等式的几何直观解释,两角和的正弦、余弦和正切公式的几何直观解释可以放在高一三角恒等变换的教学中使用,教师要引导学生进行两角和公式的结构特征与相应图形的适切性分析,在分析中构建直角梯形直观诠释公式,同时请学生思考构建两角差的正弦、余弦和正切公式的几何直观解释,数形的相互诠释促进了学生直观想象核心素养的养成.

3.5　构造圆锥曲线模型

例 7　解下列方程和不等式

(1) $\sqrt{x^2+4\sqrt{3}x+17}+\sqrt{x^2-4\sqrt{3}x+17}=6\sqrt{3}$;

(2) $\left|\,|5x+2\sqrt{3}|-|5x+7\sqrt{3}|\,\right|=5\sqrt{2}$;

(3) $\left|\sqrt{x^2-2\sqrt{5}x+13}-\sqrt{x^2+6\sqrt{5}x+53}\right|\leqslant 4\sqrt{3}$.

解　(1) 原方程可变形为$\sqrt{(x+2\sqrt{3})^2+5}+\sqrt{(x-2\sqrt{3})^2+5}=6\sqrt{3}$,根据距离的和为常数可构造对应的椭圆方程 $\sqrt{(x+2\sqrt{3})^2+y^2}+\sqrt{(x-2\sqrt{3})^2+y^2}=6\sqrt{3}$(*),即$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{15}=1$,令 $y^2=5$,可得 $x=\pm 3\sqrt{2}$;

(2) 方程变形为:

$\left|\left|x+\frac{2\sqrt{3}}{5}\right|-\left|x+\frac{7\sqrt{3}}{5}\right|\right|=\sqrt{2}$,即

$\left|\sqrt{\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2+0^2}-\sqrt{\left(x+\frac{7\sqrt{3}}{5}\right)^2+0^2}\right|=\sqrt{2}$,根据距离的差的绝对值为常数可构造对应的双曲线

方程 $\left|\sqrt{\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2+y^2}-\sqrt{\left(x+\frac{7\sqrt{3}}{5}\right)^2+y^2}\right|=\sqrt{2}$，即 $2\left(x+\frac{9}{10}\sqrt{3}\right)^2-4y^2=1$，令 $y^2=0$，可得 $x=\frac{-9\sqrt{3}\pm5\sqrt{2}}{10}$；

(3) 原不等式可变形为 $\left|\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+8}-\sqrt{(x+3\sqrt{5})^2+8}\right|\leqslant4\sqrt{3}$，构造对应的与双曲线有关的区域不等式 $\left|\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}-\sqrt{(x+3\sqrt{5})^2+y^2}\right|\leqslant4\sqrt{3}$，即 $\frac{(x+\sqrt{5})^2}{12}-\frac{y^2}{8}\leqslant1$，令 $y^2=8$，可得不等式的取值范围为 $-2\sqrt{6}-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant2\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

设计意图　以上方程与不等式三个问题的设计都是基于圆锥曲线的定义结构，它们把方程、不等式和圆锥曲线的知识融为一体，可以放在高二的复习教学中使用，教师要引导学生通过对式子左边的变形联想到变形后的结构特征与圆锥曲线定义结构的一致性，然后构造方程或不等式左边相应的圆锥曲线加以解决，代数式的几何直观性催生了学生的直观想象核心素养的形成.

3.6　构造线性规划模型

例8　求函数 $y=2\sqrt{x+8}+\sqrt{12-3x}$ 的值域.

解　令 $a=\sqrt{x+8}\geqslant0$，$b=\sqrt{12-3x}\geqslant0$，则函数的值域可通过构造目标函数 $y=2a+b$ 在约束条件 $\begin{cases}3a^2+b^2=36,\\ b\geqslant0,\\ a\geqslant0\end{cases}$ 下的取值范围来解决，不等式组表示的是图14的椭圆弧，平移直线 $b=-2a+y$ 即可得函数的值域为 $[6,2\sqrt{21}]$.

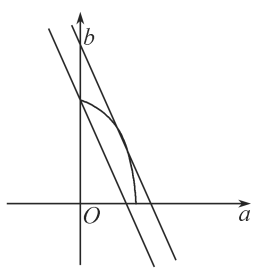

图 14

设计意图　以上含两个根号的函数值域问题的设计是基于线性规划模型，它们把函数、不等规划和圆锥曲线的知识融为一体，可以放在高三的复习教学中使用，此题用柯西不等式只能解决最大值，所以教师要引导学生联想到通过对式子的换元变形构造等价的线性规划模型加以解决，让学生体会到利用几何直观性解决代数抽象性的直观想象核心素养的要义.

3.7　构造向量模型

例9　求下列函数的值域

(1) $f(x)=x+2\sqrt{5-x^2}$；

(2) $f(x)=\frac{2\sin2x-6\cos^2x+7}{1+2\sin^2x}$.

解　(1) $f(x)=x+2\sqrt{5-x^2}$ 可以变形为 $f(x)=x\times1+\sqrt{5-x^2}\times2$，根据式子的结构特征可构造向量 $\boldsymbol{a}=(x,\sqrt{5-x^2})$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,2)$，如图15所示，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的取值范围就是 $f(x)$ 的值域. $\boldsymbol{a}$ 向量的终点是半圆 $x^2+y^2=5(y\geqslant0)$ 上的动点，$\boldsymbol{b}$ 向量的终点是半圆 $x^2+y^2=5(y\geqslant0)$ 上的定点，当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 取到最大值5，当 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴负半轴上时，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所成的角最大，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 取到最小值，此时 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta)=\sqrt{5}\times(-1)=-\sqrt{5}$，所以 $f(x)=x+2\sqrt{5-x^2}$ 的值域为 $[-\sqrt{5},5]$.

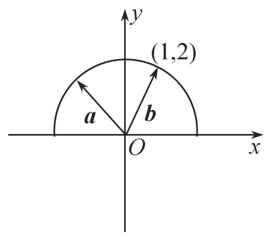

图 15

(2) $f(x)=\frac{2\sin2x-6\cos^2x+7}{1+2\sin^2x}$ 可变形为 $y=\frac{2\sin2x-3\cos2x+4}{2-\cos2x}$，即 $(y-3)\cos2x+2\sin2x=2y-4$，根据式子左边的结构特征可构造向量 $\boldsymbol{a}=(y-3,2)$ 和 $\boldsymbol{b}=(\cos2x,\sin2x)$，由 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ 可知，$|2y-4|\leqslant\sqrt{(y-3)^2+4}$，$f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{3},3\right]$.

例10　(2019年浙江高考第21题) 如图16，已知点 $F(1,0)$ 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，点 C 在抛物线上，使得 $\triangle ABC$ 的重心 G 在 x 轴上，直线 AC 交 x 轴于点 Q，且 Q 在点 F 右侧. 记 $\triangle AFG$，$\triangle CQG$ 的面积为 S_1，S_2.

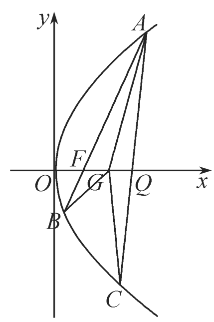

图 16

(1) 求 p 的值及抛物线的准线方程；

(2) 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值及此时点 G 的坐标.

解　(1) $p=2$，准线方程 $x=-1$.

(2) 设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AC}=\mu\overrightarrow{AQ}$，由于 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\lambda\overrightarrow{AF}+\mu\overrightarrow{AQ})$，由

于 F,G,Q 三点共线,所以$\frac{1}{3}\lambda+\frac{1}{3}\mu=1$,即 $\lambda+\mu=3$. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_{\Delta ABG}\cdot\frac{|AF|}{|AB|}}{S_{\Delta ACG}\cdot\frac{|CQ|}{|CA|}}=\frac{\frac{|AF|}{|AB|}}{\frac{|CQ|}{|CA|}}=\frac{\frac{1}{\lambda}}{1-\frac{1}{\mu}}=\frac{\frac{1}{3-\mu}}{1-\frac{1}{\mu}}=\frac{\mu}{-\mu^2+4\mu-3}=\frac{1}{4-\left(\mu+\frac{3}{\mu}\right)}$,其中$1<\mu<2$.故$\frac{S_1}{S_2}$的最小值为$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,当且仅当$\mu=\sqrt{3}$时取等号,此时可以进一步求得 $y_A=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,$y_B=\sqrt{2}-\sqrt{6}$,$y_C=-2\sqrt{2}$,故点 G 的坐标为 $G(2,0)$.

设计意图 例9中的(1)用柯西不等式只能解决最大值,而用三角换元解决此问题时,合一公式后辅助角不是特殊角,给解决问题增加了难度,例10是2019年的浙江高考解析几何大题,第(2)小题用常规的方法来求解难度和计算量都很大,所以上述这些问题存在的困难都可以通过构造向量模型简便地加以解决,而且学生在用构造向量法解决这些问题的过程中深刻领会到打通数形通道的必要性和重要性,学生直观解决问题的意识和能力渐变为学生的直观想象核心素养.

4 结束语

构造法具有很强的技巧性和创新性,需要学生具备发现、类比、化归等一系列重要的思想方法.它和其它的数学方法一样,是基于原有问题的一种探究活动,是将陌生的结构特征转化为熟悉的结构特征的一种创新活动,只要你善于观察、联想和研究知识板块间的关联性,你一定能完成由未知模向已知模的过渡,从而直观简便地解决问题.如果把直观想象核心素养比作一棵大树,那么构造法就是给它输送养料的部分根系,构造法中直观解决问题的思想将凝炼为学生的直观想象核心素养.当然直观想象核心素养的养成不能仅靠构造法,例如借助现代信息技术的教学方式,也能够将复杂问题直观化,学生在切身感受图形的变化过程中培育直观想象核心素养.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2020.

[2] 巩道坤等.情境视角下的数学核心素养养成探究[J].教育与教学,2017(18):56-58.

[3] 王莎莎.课堂教学中要重视直观想象素养的落实[J].数学教学通讯,2020(11):20-22.

[4] 古岩燕.高中生学习数学构造法的教学研究[D].新乡:河南师范大学,2013.

[5] 课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.数学必修第一册[M].北京:人民教育出版社,2019.

作者简介 方治(1978—),男,浙江义乌人,中学高级教师;曾荣获全国优秀教练员、浙江省教坛新秀、浙江省优秀教师(师德楷模)、浙派名师培养人选、金华市优秀班主任、义乌市拔尖人才、义乌市优秀专业技术人才、义乌市学科带头人、义乌市十大优秀青年、义乌市高效课堂创新年先进个人、义乌市教育科研先进个人等;在省、地、市教学比武中获一、二等奖多次;个人执笔的课题获省一等奖一次、二等奖一次;主要研究数学与数学教育;有多篇论文发表.

高中数学渗透美育的策略研究

山东省淄博第七中学 255400 **刘海珍 杨德怀**

【摘 要】 本文从深入挖掘教材中的美育因素、利用多样化工具和素材直观展示数学之美、从数学与其他学科的融合中发现数学之美、数学美育中应注意的几个问题四个方面阐述了高中数学渗透美育的策略.

【关键词】 高中数学;美育;策略研究

数学是理性思维和想象的结合,是研究数量、结构、变化以及空间模型的一门学科.美是数学与生俱来的本质属性,也是数学学习追求的目标之一.英国著名数理逻辑学家罗素指出:“数学,不但拥有真理,而且也具有至高的美.”第五世纪著名数学评论家普罗克拉斯断言:“哪里有数,哪里就有美.”雷尼说:“数学的美不是一件辅助的、附带的事,它是数学的一个基本特征.”数学家的这些精辟的论述告诉我们:数学是美的,数学美是存在而且深刻的.但是数学美又不完全等同于自然美和艺术美,数学美是一种理性的美、抽象的美[1].由于数学美的抽象含蓄,并不是所有学生都能深刻感受和体验到数学之美,