要纵向关注每一位学生在哪些题上犯错.只有多角度分析,才能在教学中真正做到因材施教有的放矢,才能做到分层分类和精准教学.

第三是要确保讲评的精准.高效的试卷评讲课不仅要确保学生存在的问题能顺利解决,还要在此基础上巩固必备知识,掌握正确规范的解题方法,更要促使学生的知识体系有进一步的架构和完善,总结提炼出解答此类问题的通式解法,提升解答数学问题的能力及效率.

第四是要确保纠错本的使用.学生错题本是提升学生解题能力的有效媒介.错题本可以再现错题,让学生不断反思,不断巩固拓展.对于学生来说,除了听教师讲评,还需从问题中吸取教训,找准"拐点",提高解题能力.

"高效率、低负担、精准化"的课堂教学是高三教师追求的目标.希望在教育云课堂、智慧课堂的引领下,能利用高科技、依托大数据,促进课堂教学模式的创新,让精准化的分层分类课堂教学和个性化学习成为现实,促进高三数学复习课教学效果的检验和评价落到实处.借助网上阅卷系统,教学以测而定教,以考而测学,教师深挖精研,把握考向精准命题,研究学情精准施策.学生练考结合,练有考向考有提升,反思问题精准掌握.教学之路永无止境,探究之路关山万里,析学情以促教,研模式而求进,让数学复习之路走得更稳更远.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准[M].北京:人民教育出版社,2017.

[2] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究中心.数学必修 5[M].北京:人民教育出版社,2007.

作者简介 何桂琴(1971—),女,回族,中学高级教师,宁夏师范学院附属中学党委书记;主要研究教育管理和教学研究.

圆锥曲线与三角形"四心"

河北省邯郸市第一中学 056000 马进才 李 萌

【摘 要】 本文研究了圆锥曲线与三角形的重心、内心、外心、重心相结合的问题,更加深刻地认识了圆锥曲线,以此提升了学生分析问题和解决问题的能力.

【关键词】 圆锥曲线;重心;内心;外心;垂心

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》指同:"通过高中数学课程的学习,学生能提高学习数学的兴趣,增强学好数学的自信心,养成良好的数学学习习惯,发展自主学习的能力."[1] 从近几年圆锥曲线的命题风格看,既注重知识和能力的考查,又突出圆锥曲线的本质特征,而圆锥曲线中面积、弦长、最值等几乎成为研究的常规问题."四心"问题进入圆锥曲线,让我们更是耳目一新.因此在高考数学复习中,通过让学生研究三角形的"四心"与圆锥曲线的结合问题,快速提高学生的数学解题能力,增强学生的信心,备战高考.

1 三角形重心的性质及其应用

重心是三角形三条中线的交点,其具备如下性质:

1.G 是 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$;重心坐标 $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3},\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$;

2.G 为 $\triangle ABC$ 的重心,P 为平面上任意点,则 $\overrightarrow{PG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$;

3.重心是中线的三等分点,重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比是 2∶1;

4.重心与三角形的 3 个顶点组成的 3 个三角形的面积相等,即重心到 3 条边的距离与 3 条边的长成反比.

例 1 已知 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,M 是第一象限内的点,且满足 $|MF_1|+|MF_2|=4$,若 I 是 $\triangle MF_1F_2$ 的内心,G 是 $\triangle MF_1F_2$ 的重心,记 $\triangle IF_1F_2$ 与 $\triangle GF_1M$ 的面积分别为 S_1,S_2,则( ).

A.$S_1>S_2$

B.$S_1=S_2$

C.$S_1<S_2$

D.S_1 与 S_2 大小不确定

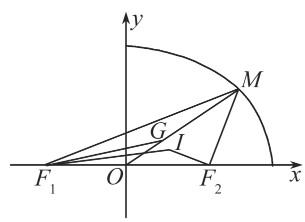

图 1

分析 作出图示,根据 I,G 的特点分别表示出 S_1,S_2,即可判断出 S_1,S_2

的大小关系.

解析　因为$|MF_1|+|MF_2|=4>|F_1F_2|=2$,所以 M 的轨迹是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$在第一象限内的部分,如图 1 所示.

因为 I 是 $\triangle MF_1F_2$ 的内心,设内切圆的半径为 r,所以$\frac{(|MF_1|+|MF_1|+|F_1F_2|)\cdot r}{2}=\frac{|F_1F_2|\cdot y_M}{2}$,所以 $r=\frac{y_M}{3}$,所以 $S_1=\frac{|F_1F_2|\cdot y_1}{2}=\frac{|F_1F_2|\cdot r}{2}=\frac{y_M}{3}$,又因为 G 是 $\triangle MF_1F_2$ 的重心,所以 $OG:GM=1:2$,所以 $S_2=\frac{2}{3}S_{\triangle MOF_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle F_2MF_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{|F_1F_2|\cdot y_M}{2}=\frac{y_M}{3}$,所以 $S_1=S_2$,故选 B.

例 2　已知 F_1,F_2 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点,$P$ 是椭圆上一点(左右顶点除外),G 为 $\triangle PF_1F_2$ 为重心.若 $\angle F_1GF_2\leqslant\frac{2}{3}\pi$ 恒成立,则椭圆的离心率的取值范围是(　　).

A.$\left(0,\frac{1}{3}\right]$　　B.$\left(0,\frac{1}{2}\right]$

C.$\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$　　D.$\left[\frac{1}{3},1\right)$

分析　根据 P 是椭圆上一点,且 $\angle F_1GF_2\leqslant\frac{2}{3}\pi$ 恒成立,不妨设点 P 为上顶点,再根据 G 为 $\triangle PF_1F_2$ 为重心,由 $GO=\frac{1}{3}PO=\frac{1}{3}b\geqslant F_1O\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}c$ 求解.

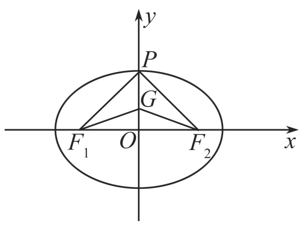

图 2

解析　因为 P 是椭圆上一点,且 $\angle F_1GF_2\leqslant\frac{2}{3}\pi$ 恒成立,不妨设点 P 为上顶点,如图 2 所示.

因为 G 为 $\triangle PF_1F_2$ 为重心,所以 $GO=\frac{1}{3}PO=\frac{1}{3}b$,而 $GO\geqslant F_1O\tan\frac{\pi}{6}$,即 $GO\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}F_1O$,所以$\frac{1}{3}b\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}c$,所以 $b^2\geqslant3c^2$,所以 $a^2-c^2\geqslant3c^2$,即 $e^2\leqslant\frac{1}{4}$,解得 $0<e\leqslant\frac{1}{2}$,故选 B.

例 3　已知 P 为双曲线 C:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$上一点,$F_1,F_2$ 为双曲线 C 的左、右焦点,M、I 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心、内心,若 $MI\perp x$ 轴,则 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的半径为______.

解析　如图 3,不妨设点 P 在第一象限,D,E,F 分别为和 $\odot I$ 与 $\triangle PF_1F_2$ 三边相切的切点.由切线长定理以及双曲线定义,得 $2a=|PF_1|-|PF_2|=(|PF|+|PF_1|)-(|PE|+|EF_2|)=|FF_1|-|EF_2|=|F_1D|-|F_2D|=(x_D+c)-(c-x_D)=2x_D$,所以 $x_D=a=2$,$x_M=x_I=x_D=2$.

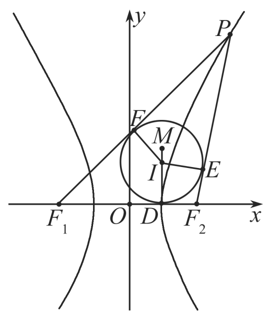

图 3

设 $P(x_0,y_0)$,由 M 为 $\triangle PF_1F_2$ 重心,知 $x_0=3x_M=6$,$y_0=4\sqrt{6}$.

所以 $|PF_1|=\sqrt{(6+4)^2+(4\sqrt{6}-0)^2}=14$,$|PF_2|=\sqrt{(6-4)^2+(4\sqrt{6}-0)^2}=10$.

设 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆半径为 r,则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\times r=16r$.

另一方面,$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times y_0=\frac{1}{2}\times8\times4\sqrt{6}=16\sqrt{6}$,所以 $16r=16\sqrt{6}$,$r=\sqrt{6}$.

2　三角形内心的性质及其应用

内心是三角形三条角平分线的交点,是三角形内切圆的圆心,其具备如下性质:

1.I 是 $\triangle ABC$ 的内心$\Leftrightarrow a\cdot\overrightarrow{IA}+b\cdot\overrightarrow{IB}+c\cdot\overrightarrow{IC}=\mathbf{0}$(其中 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三条边);

2.设三角形内切圆的半径为 r,则

(1)在任意三角形中,$r=\frac{2S_\triangle}{C_\triangle}$(其中 $C_\triangle$ 为三角形 ABC 的周长,$S_\triangle$ 为三角形 ABC 的面积);

(2)在任意三角形中,$r=\frac{a+b-c}{2}$(其中 a,b 为直角边,c 为斜边).

例 4　已知 M 是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点,$F_1,F_2$ 是椭圆的左,右焦点,点 I 是 $\triangle MF_1F_2$ 的内心,延长 MI 交线段 F_1F_2 于 N,则$\frac{|MI|}{|IN|}$的值为(　　).

A.$\frac{5}{3}$　　B.$\frac{3}{5}$　　C.$\frac{4}{3}$　　D.$\frac{3}{4}$

解析　如图 4,点 M 是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点,过点 M 作 BM 垂直直线 F_1F_2 于点 B,过点 I 作 IA 垂直直线 F_1F_2 于点 A,设 $\triangle MF_1F_2$ 的内切圆半径为 r,则 $|IA|=r$,由三角形面

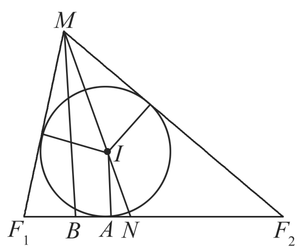

图 4

积相等即:$S_{\triangle MF_1F_2}=S_{\triangle MF_1I}+S_{\triangle MIF_2}+S_{\triangle IF_1F_2}$ 得$\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|MB|=\frac{1}{2}r|MF_1|+\frac{1}{2}r|F_1F_2|+\frac{1}{2}r|MF_2|$.

又$|MF_1|+|MF_2|=2a$,故得$\frac{1}{2}2c\cdot|MB|=\frac{1}{2}r\cdot 2a+\frac{1}{2}r\cdot 2c$,所以$\frac{|IA|}{|MB|}=\frac{c}{a+c}$,由椭圆方程$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$得$a=5,b=4,c=\sqrt{a^2-b^2}=3$,所以$\frac{|IA|}{|MB|}=\frac{c}{a+c}=\frac{3}{8}$.由$\triangle MNB$与$\triangle INA$相似,可得$\frac{|IA|}{|MB|}=\frac{|IN|}{|MN|}=\frac{3}{8}$,令$|IN|=3m$,则$|MN|=8m$,可求得$\frac{|IN|}{|IM|}=\frac{|IN|}{|MN|-|IN|}=\frac{3m}{8m-3m}=\frac{3}{5}$,故选 A.

例 5　点 F_1、F_2 分别是双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点,点 P 在双曲线上,则$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径 r 的取值范围是(　　).

A.$(0,\sqrt{3})$　B.$(0,2)$

C.$(0,\sqrt{2})$　D.$(0,1)$

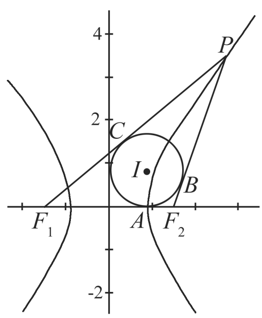

图 5

解析　如图 5 所示,设$\triangle PF_1F_2$的内切圆圆心为 I,内切圆与三边分别相切于点 A,B,C,根据圆的切线可知:$|PB|=|PC|$,$|F_1A|=|F_1C|$,$|F_2A|=|F_2B|$,又根据双曲线定义$|PF_1|-|PF_2|=2a$,即$(|PC|+|F_1C|)-(|PB|+|F_2B|)=2a$,所以$|F_1C|-|F_2B|=2a$,即$|F_1A|-|F_2A|=2a$,又因为$|F_1A|+|F_2A|=2c$,所以$|F_1A|=a+c$,$|F_2A|=c-a$,所以 A 点为右顶点,即圆心 $I(a,r)$.

考虑 P 点在无穷远时,直线 PF_1 的斜率趋近于$\frac{b}{a}$,此时 PF_1 方程为$y=\frac{b}{a}(x+c)$,此时圆心到直线的距离为$\frac{|ab-ar+bc|}{\sqrt{b^2+a^2}}=r$,解得$r=b$,因此$\triangle PF_1F_2$内切圆半径$r\in(0,b)$,故选 A.

3　三角形垂心的性质及其应用

垂心是三角形三条高线的交点,其具备如下性质:

1.H 是$\triangle ABC$的垂心$\Leftrightarrow\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$;

2.垂心到三角形一顶点距离为此三角形外心到此顶点对边距离得 2 倍.

例 6　(2021 年·辽宁省高三期末)已知 F_1,F_2 分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点,过点 F_1 且垂直于实轴的直线与双曲线的两条渐近线分别相交于 A,B 两点,若坐标原点 O 恰为$\triangle ABF_2$的垂心(三角形三条高的交点),则双曲线的离心率为(　　).

A.$\frac{\sqrt{21}}{3}$　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.3

解析　$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,则双曲线的渐近线为$y=\pm\frac{b}{a}x$,则当$x=-c$时,$y=\pm\frac{b}{a}\cdot c=\pm\frac{bc}{a}$.设$A\left(-c,\frac{bc}{a}\right)$,$B\left(-c,-\frac{bc}{a}\right)$,因为若坐标原点 O 恰为$\triangle ABF_2$的垂心,所以$OA\perp BF_2$,即$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$,即$\left(-c,\frac{bc}{a}\right)\cdot\left(2c,\frac{bc}{a}\right)=0$,则$-2c^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2=0$,即$b^2=2a^2$.因为$b^2=2a^2=c^2-a^2$,所以$c^2=3a^2$,$c=\sqrt{3}a$,离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$,故选 C.

例 7　(2020 年福建省高三联考 16 题)已知:椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$的右焦点为 F,M 为上顶点,O 为坐标原点,直线 l 交椭圆于 P,Q 两点,当 F 为$\triangle PQM$的垂心时,则$\triangle PQM$的面积为______.

解析　因为 F 为$\triangle PQM$的垂心,所以$MF\perp PQ$,$PF\perp QM$.

由题意知 $M(0,2)$,$F(2,0)$,所以$k_{MF}=-1$,$k_{PQ}=1$,设直线 PQ 方程为$y=x+t$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$联立$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=x+t\end{cases}$得$3x^2+4tx+2t^2-8=0$,可得$\Delta=-8t^2+96>0$,即$t\in(-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$,且可得$x_1+x_2=-\frac{4t}{3}$,$x_1x_2=\frac{2t^2-8}{3}$,因为$PF\perp QM$,所以$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{QM}=(x_1-2,y_1)\cdot(x_2,y_2-2)=0$,即$x_1x_2-2x_2+y_1y_2-2y_1=2x_1x_2+(t-2)(x_1+x_2)+t^2-2t=\frac{2(2t^2-8)}{3}+(t-2)\cdot\left(\frac{-4t}{3}\right)+t^2-2t=\frac{3t^2+2t-16}{3}=0$.解得$t=-\frac{8}{3}$,或$t=2$,

当$t=2$时,P,Q,M 三点共线(舍去),所以$t=-\frac{8}{3}$,此时$x_1+x_2=\frac{32}{9}$,$x_1x_2=\frac{56}{27}$,$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{8}{9}\sqrt{11}$,点 M 到直线 PQ 的距离

$$d=\frac{\left|-\frac{14}{3}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7}{3}\sqrt{2}.$$

所以 $S_{\triangle MPQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{28}{27}\sqrt{22}$.

4　三角形外心的性质及其应用

外心是三角形三边的垂直平分线的交点,是三角形外接圆的圆心,其具备如下性质:

1. O 是 $\triangle ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ (或 $\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$);

2. 若点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,则 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$;

3. 若 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,则 $\sin2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin2C\cdot\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$;

4. 多心组合:$\triangle ABC$ 的外心 O、重心 G、垂心 H 共线,即 $\overrightarrow{OG}\parallel\overrightarrow{OH}$.

例 8　设 $F(c,0)$ 为双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点,以 F 为圆心,b 为半径的圆与双曲线在第一象限的交点为 P,线段 FP 的中点为 D,$\triangle POF$ 的外心为 I,且满足 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OI}(\lambda\neq0)$,则双曲线 E 的离心率为(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

分析　设 $F'(-c,0)$ 为双曲线的左焦点,先由 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OI}(\lambda\neq0)$ 可确定 O、D、I 三点共线,则根据外心的性质可得 $OD\perp PF$,再由点 O 为 FF' 的中点,根据中位线性质可得 $PF'\parallel OD$,则 $PF'\perp PF$,进而在 $\mathrm{Rt}\triangle PFF'$ 中利用勾股定理求解.

解析　因为 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OI}(\lambda\neq0)$,所以 O、D、I 三点共线,因为点 D 为线段 FP 的中点,$\triangle POF$ 的外心为 I,所以 $DI\perp PF$,即 $OD\perp PF$,设双曲线的左焦点为 $F'(-c,0)$,则点 O 为线段 $F'F$ 的中点. 在 $\triangle PFF'$ 中,$PF'\parallel OD$,即 $PF'\perp PF$,所以 $\triangle PFF'$ 是直角三角形,所以 $|F'F|^2=|F'P|^2+|PF|^2$,因为 $|PF|=b$,由双曲线定义可得 $|PF'|-|PF|=2a$,所以 $|PF'|=2a+b$,则 $(2c)^2=(2a+b)^2+b^2$,因为 $c^2=a^2+b^2$,整理可得 $b=2a$,所以 $c=\sqrt{5}a$,则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$,故选 D.

例 9　(2021 年成都七中半期 16 题) F_1,F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的左、右焦点,点 P 在双曲线上,满足 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,若 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径与外接圆半径之比为 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,则该双曲线的离心率为______.

解析　因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,所以 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$,即 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形,所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$,$||PF_1|-|PF_2||=2a$,则 $2|PF_1|\cdot|PF_2|=|PF_1|^2+|PF_2|^2-(|PF_1|-|PF_2|)^2=4(c^2-a^2)$,$(|PF_1|+|PF_2|)^2=(|PF_1|-|PF_2|)^2+4|PF_1|\cdot|PF_2|=8c^2-4a^2$.所以 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆半径 $r=\frac{|PF_1|+|PF_2|-|F_1F_2|}{2}=\sqrt{2c^2-a^2}-c$,外接圆半径 $R=c$,

由题意,得 $\frac{\sqrt{2c^2-a^2}-c}{c}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,整理得 $\left(\frac{c}{a}\right)^2=4+2\sqrt{3}$,所以双曲线的离心率 $e=\sqrt{3}+1$.

例 10　(2018 全国高中数学联赛湖北预赛) 已知点 P 在离心率为 $\sqrt{2}$ 的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上,F_1、F_2 为双曲线的两个焦点,且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,则 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径 r 与外接圆半径 R 之比为______.

解析　由 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,知 $\angle P_1PF_2=90^\circ$. 设 $|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$,又 $|F_1F_2|=2c$,则可得 $R=c$,$r=\frac{1}{2}(m+n-2c)$,且

$$m^2+n^2=4c^2,\qquad ①$$

$$|m-n|=2a.\qquad ②$$

设 $\frac{r}{R}=k$,则 $r=kR=kc=\frac{1}{2}(m+n-2c)$,即有

$$m+n=(2k+2)c.\qquad ③$$

由 ①②③ 可得 $(2k+2)^2c^2+4a^2=8c^2$,所以 $(k+1)^2=\frac{2c^2-a^2}{c^2}=2-\frac{1}{e^2}=\frac{3}{2}$,解得 $k=\frac{\sqrt{6}}{2}-1$.

故 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径 r 与外接圆半径 R 之比为 $\frac{\sqrt{6}}{2}-1$.

参考文献

[1]　中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.

作者简介　马进才(1983—),男,河北邯郸人,中学高级教师;主要研究课程教学、竞赛与自主招生、解题教学.

李萌(1986—),女,河北邯郸人,中学一级教师,硕士;主要研究课程教学、课程与数学史.