平面向量数量积运算方法的“思维建模”分析*

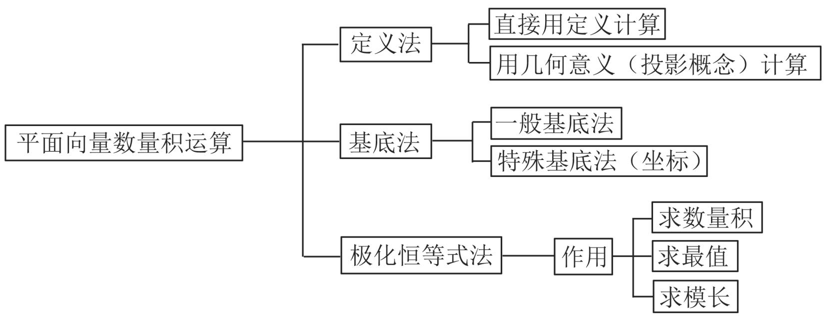
山东省泰安第二中学　271000　曹炳友

【摘　要】 平面向量数量积运算,是平面向量知识的重点,由于这类问题的解题方法比较灵活,这部分内容也成了少数学生的难点. 本文以思维建模形式,给出平面向量数量积运算的方法体系,实证解析依据问题特征,选择相匹配的运算方法,其目的在于将方法模型化,提高平面向量数量积运算的效率.

【关键词】 平面向量;数量积;思维建模

1　平面向量数量积计算方法思维模型

平面向量数量积计算方法体系可以看作是一系列思维模型,如下图所示:



2　平面向量数量积计算方法思维模型解析

2.1　定义法

2.1.1　直接用定义计算

例 1　在等腰三角形 AOB 中,若 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=5$,且 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\geqslant\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的取值范围是(　　).

A. $[-15,25)$　　B. $[-15,15]$

C. $[0,25)$　　D. $[0,15]$

解析　将已知不等式变形为 $2|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\geqslant|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$,两边平方并整理得:$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\geqslant-15$,而 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=5\times5\cos\theta\leqslant25$,因 $\theta\neq0$,上式等号不成立,故选 A. 在这里,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$,就是定义法计算平面向量的数量积.

2.1.2　运用几何意义(投影概念)计算数量积

定义　已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,其夹角为 θ,将 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影(投影是一个数量). 因此,由平面向量数量积的定义可知,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模与向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的乘积.

例 2　如图 1,四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O,且 $OB=2OD$,$AC=2$,过点 D 作 $DE\perp AC$,垂足为 E,若 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}=6$,则四边形 $ABCD$ 的面积为______.

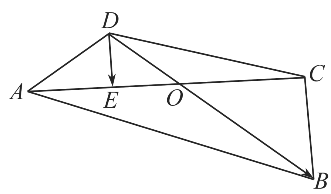


图 1

分析　因为 $OB=2OD$,所以 $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{DO}$,所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DE}\cdot(3\overrightarrow{DO})=3\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DO}$,又因为 $DE\perp AC$,所以 $\overrightarrow{DO}$ 在 $\overrightarrow{DE}$ 上的投影为 DE($\overrightarrow{DE}$ 的数量),所以 $3\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DO}=3|\overrightarrow{DE}|^2$,所以 $|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{2}$,由于 $OB=2OD$,所以三角形 ABC 中 AC 边上的高为 $2\sqrt{2}$,所以四边形 $ABCD$ 的面积为 $S=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

* 基金项目:本文系山东省教育科学“十三五”规划 2020 年度重点课题“多元‘思维建模’教学的理论建构与实践探索”(课题批准号:2020ZD049)阶段性成果.

练习 1　如图 2,已知 $\odot O$ 的一条弦 AB 的长为 a,试计算$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=$______.

分析　取弦 AB 的中点为 M,则 $OM\perp AB$,$\overrightarrow{AO}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影为 AM,所以,$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=a\cdot\left(\dfrac{1}{2}a\right)=\dfrac{1}{2}a^2$.

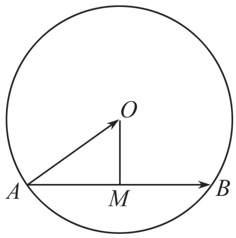


图 2

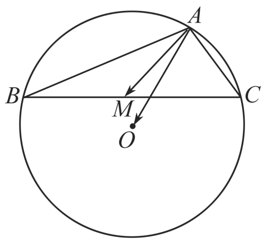


图 3

练习 2　如图 3,O 为 $\triangle ABC$ 的外心,$AB=4$,$AC=2$,$\angle BAC$ 为钝角,M 是边 BC 的中点,则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}=$______.

分析　因为 M 是 BC 的中点,所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2\right)=5$.

练习 3　如图 4,已知点 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心,$AB=8$,$AC=12$,$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$,若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,求 $6x+9y$ 的值.

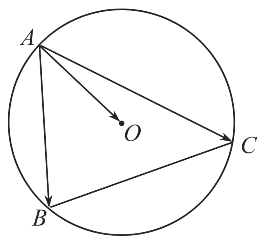


图 4

分析　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}\cdot(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})=x\overrightarrow{AB}^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=64x+8\times12\times\dfrac{1}{2}y=64x+48y$,

所以 $64x+48y=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=32$.　　①

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}\cdot(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})=x\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}^2=12\times8\times\dfrac{1}{2}x+144y=48x+144y$,

所以 $48x+144y=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=72$.　　②

联立 ①② 得:$x=\dfrac{1}{6}$,$y=\dfrac{4}{9}$,所以 $6x+9y=5$.

小结　练习 1,练习 2,练习 3 的解题思路都来自于同一个思维模型,即$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$(※),由此可见,加深对图 2 以及相应的结论(※)的理解是快速解决此类问题的关键.

2.2　基底法

从定义来看,计算两个向量的数量积,需要两个向量的模长以及夹角的余弦,它反映了两个向量的相对直接的关系,当两个向量的直接关系不易被发现时,可考虑用一组基底分别表示目标中的两个向量,将问题最终转化为基向量间的数量积运算.

2.2.1　一般基底法

在图形中取模和夹角已知、不共线的两个向量作为一组基底,用基底表示目标中的向量并进行运算.

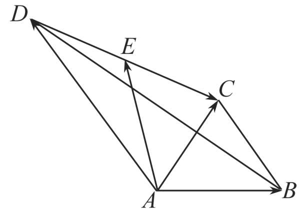


图 5

例 3　如图 5,在四边形 $ABCD$ 中,$AD=4$,$AB=2$.(1) 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形,且 $AD\parallel BC$,E 是 CD 的中点,求$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$;(2) 若 $AB=AC$,$\cos\angle CAB=\dfrac{3}{5}$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{4}{5}$,求$|\overrightarrow{DC}|$.

分析　(1) 取$\{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\}$为一组基底,则$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})$,$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})\cdot\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}^2+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2=\dfrac{3}{4}\times16+\dfrac{1}{4}\times2\times4\times\dfrac{1}{2}-2=11$.

(2) 仍取$\{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\}$为一组基底,则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$,所以$\dfrac{4}{5}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\dfrac{12}{5}$,所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{16}{5}$,$\overrightarrow{DC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=4-2\times\dfrac{16}{5}+16=\dfrac{68}{5}$.

所以$|\overrightarrow{DC}|=\dfrac{2\sqrt{85}}{5}$.

2.2.2　特殊基底法

如果所给图形中有垂直信息,则可以通过建立平面直角坐标系,用坐标表示向量计算数量积,坐标是特殊基底(单位正交基底)背景下的概念.

例 4　如图 6,半径为$\sqrt{3}$ 的扇形 AOB 的圆心角为 120°,点 C 在弧 AB 上,且 $\angle COB=30^\circ$,若$\overrightarrow{OC}=$

$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,则 $\lambda+\mu=$(　　).

A.$\sqrt{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D.$2\sqrt{3}$

解析　由已知,$\angle AOC=90°$,建立如图所示平面直角坐标系,则$\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{OA}=(0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{OB}=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,代入$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,得$(\sqrt{3},0)=\lambda(0,\sqrt{3})+\mu\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

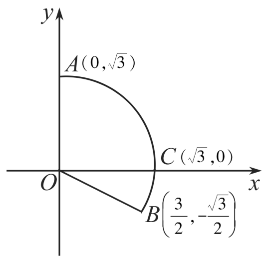


图6

所以$\begin{cases}\sqrt{3}=\frac{3}{2}\mu,\\0=\sqrt{3}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2}\mu,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3},\\\mu=\frac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}$

所以 $\lambda+\mu=\sqrt{3}$,故选A.

2.3　极化恒等式法

2.3.1　极化恒等式

(1)极化恒等式:设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个平面向量,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$.

证明　因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)-(\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2)=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$.

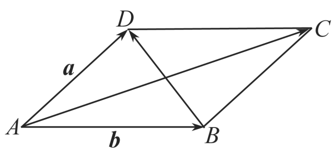


图7

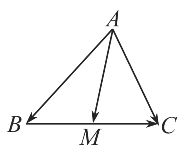


图8

(2)极化恒等式的几何意义:如图7,平面向量的数量积可以表示为以这组向量为邻边的平行四边形的"和对角线"与"差对角线"平方差的四分之一,即:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2)$.

(3)极化恒等式的三角形模式:如图8,在$\triangle ABC$中,若 M 是 BC 的中点,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$.

2.3.2　极化恒等式的应用

(1)求数量积

例5　(2016年江苏数学高考13题)如图9,在$\triangle ABC$中,D是BC的中点,E,F是线段AD的两个三等分点,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$,$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$,则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$的值是______.

分析　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,由极化恒等式,得:$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AD^2-BD^2$,所以$AD^2-BD^2=4$,又$AD=3FD$,所以$9FD^2-BD^2=4$①,同理,由$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$,得$FD^2-BD^2=-1$②,联立①②,得:$FD^2=\frac{5}{8}$,$BD^2=\frac{13}{8}$,同样由极化恒等式,得$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}^2-\overrightarrow{BD}^2=4FD^2-BD^2=4\times\frac{5}{8}-\frac{13}{8}=\frac{7}{8}$,所以$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{7}{8}$.

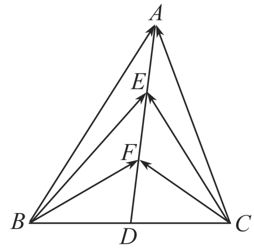


图9

(2)求最值

例6　如图10,$\triangle ABC$是边长为$2\sqrt{3}$的正三角形,EF为$\triangle ABC$外接圆的一条直径,M为$\triangle ABC$的边BC上的一个动点,求$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{FM}$的最大值.

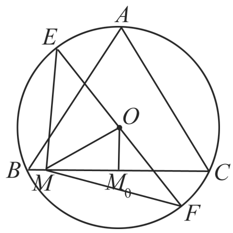


图10

分析　设圆的圆心为O,半径为R,因为$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{FM}=-\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}$,由极化恒等式,得:$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=OM^2-OF^2$,所以$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{FM}=R^2-OM^2$,要使$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{FM}$最大,只要$OM$最小即可,过$O$作$OM_0\perp BC$,$M_0$为垂足,则$OM\geqslant OM_0$,而$R=2$,$OM_0=1$,所以$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{FM}\leqslant 2^2-1^2=3$,所以$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{FM}$的最大值为3.

(3)求模长

例7　已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是平面内两个互相垂直的单位向量,若向量$\boldsymbol{c}$满足,$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,则$|\boldsymbol{c}|$的最大值是(　　).

A.1　　B.2　　C.$\sqrt{2}$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

分析　由极化恒等式,得$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$.

因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$,因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,化简得$\boldsymbol{c}^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$,又

$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|\leqslant|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{2}|\boldsymbol{c}|$，$|\boldsymbol{c}|\leqslant\sqrt{2}$，故选 C.

注　本题也可以建立坐标系，用向量的坐标进行运算.

分析　如图 11，分别取向量 $\boldsymbol{a}$，向量 $\boldsymbol{b}$ 所在直线为 x 轴，y 轴，建立平面直角坐标系，则 $a=(1,0)$，$b=(0,1)$，设 $c=(x,y)$，因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，所以 $(1-x,-y)\cdot(-x,1-y)=0$，即 $x^2-x+y^2-y=0$，配方得 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，该方程表示圆心为 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，半径 r 为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆的方程.

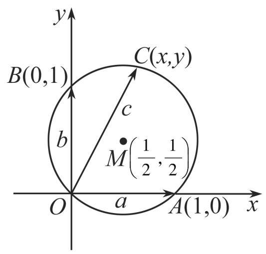


图 11

又 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+y^2}$，它表示点 (x,y) 到原点 M 的距离，由图 11 可知，$|\boldsymbol{c}|\leqslant 2r=\sqrt{2}$，故选 C.

综上，平面向量数量积的运算，可依据问题的条件，沿着定义法、基底(一般基底)法、坐标(特殊基底)法的顺序去思考，当问题具备了几何意义(投影概念)条件，用几何意义(投影概念)法会简化思路和运算过程，同样当问题具备了极化恒等式的条件(和向量、差向量，或三角形中线等)时，运用极化恒等式法同样会简化思路和运算过程.

作者简介　曹炳友(1962—)，男，山东新泰市人，正高级教师，主要研究高中数学"思维建模"教学.主持省级课题 4 项(全部结题)，现主持省级重点课题"多元'思维建模'教学的理论建构与实践探索"(课题批准号:2020ZD049)，在省级以上刊物发表论文 30 余篇.

关注认知发展理论　寻找思维突破契机

——对一道课本导数题的探究历程

北京市第一七一中学　100013　王桢宇　管　悦
北　京　宏　志　中　学　100013　王芝平

【摘　要】 本文通过对一道课本习题的探究，讨论了函数恒成立问题的常见解法，零点存在定理应用时的"找点"问题，运用技巧均未超出课本习题范畴，低起点、高站位，着力培养学生数学运算素养，展示学生多角度思考.

【关键词】 恒成立；隐形零点；零点存在定理；找点

最近发展区理论最早由维果茨基提出，该理论强调以学生现有的知识能力水平为基础，通过设计不同层次的问题，促进学生自主建构新知，并引导学生向更高层次发展.

笔者认为教学实施过程，需要建立在充分了解学生认知的基础上，搭建现实发展水平与潜在发展水平的桥梁，教学设计中需要以"尊重学情、合理梯度、低端统一、高端开放"为原则：即要充分考虑学生的现有水平和能力及已经掌握的知识进行设计，甚至要预设学生完成情况进行适时调整，尤其是要关注群体内学生认知差异，重点落实基本技能，基本方法，并有较高站位，设计试题的外延，研出味道.

本文以一道课本例题的研究课为例，呈现如何结合学生认知进行教学设计，一孔之见，抛砖引玉.

1　题目再现

人民教育出版社 2019《普通高中教科书选择性必修第二册》(A 版)第 104 页 18 题[1]：$f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+m)$.当 $m\leqslant 2$ 时，求证：$f(x)>0$.

2　参考解答

与上述教科书配套的教师教学用书给出的参考答案：

当 $m\leqslant 2$，$x\in(-m,+\infty)$ 时，$\ln(x+m)\leqslant\ln(x+2)$，则有 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+m)\geqslant\mathrm{e}^x-\ln(x+2)$.

故只需证明当 $m=2$ 时，$f(x)>0$.

当 $m=2$ 时，函数 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x+2}$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增.又 $f'(-1)<0$，$f'(0)>0$，故 $f'(x)=0$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上有唯一实根 x_0，且