解析几何中的创新题型分类解析

湖北省襄阳市第一中学　441000　王　勇　张华丽

【摘　要】 解析几何中的创新题型大致分为四类:定义新的概念、创设新的情景、设置新的交汇、建模新的应用.本文结合相关高考模拟题予以分类解析,旨在探索题型规律,揭示解题方法.

【关键词】 解析几何;创新题型;分类解析

新课程标准要求考生对“新颖的信息、情景和设问,选择有效的方法和手段收集信息,综合与灵活地应用所学的数学知识、思想和方法,进行独立思考、探索和探究,提出解决问题的思路,创造性地解决问题.”[1] 随着新一轮课程改革的深入和推进,高考的改革使知识立意转向能力立意,强化学科素养和关键能力的考查,推出了一批新颖而又别致,具有创新意识和创新思维的新题.本文采撷解析几何中的创新题型并予以分类解析,旨在探索题型规律,揭示解题方法.

1　定义新的概念

例 1　(2021·福州市模拟题)(多选)瑞士数学家欧拉 1765 年在其所著的《三角形的几何学》一书中提出:任意三角形的外心、重心、垂心在同一条直线上,后人称这条直线为欧拉线.已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(-4,0)$,$B(0,4)$,其欧拉线方程为 $x-y+2=0$,则顶点 C 的坐标可以是(　　).

A.$(2,0)$　　B.$(0,2)$

C.$(-2,0)$　　D.$(0,-2)$

答案:选 AD.

点评　本题以“欧拉线”为载体,考查考生的信息迁移能力和运算求解能力,阅读并领悟“欧拉线”的实质是解决问题的关键.本题是多选题,是新高考标志性的新题型.

例 2　(2021·青岛市模拟题)(多选)古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名,他发现:“平面内到两个定点 A,B 的距离之比为定值 $\lambda(\lambda\neq1)$ 的点的轨迹是圆.[2]”后来,人们将这个圆以他的名字命名,称为阿波罗尼斯圆,简称阿氏圆.平面直角坐标系 xOy 中,$A(-2,0)$,$B(4,0)$,点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$.设点 P 的轨迹为 C,则下列结论正确的是(　　).

A.C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=9$

B.在 x 轴上存在异于 A,B 的两定点 D,E,使得 $\frac{|PD|}{|PE|}=\frac{1}{2}$

C.当 A,B,P 三点不共线时,射线 PO 是 $\angle APB$ 的平分线

D.在 C 上存在点 M,使得 $|MO|=2|MA|$

答案:选 BC.

点评　本题以“阿波罗尼斯圆”为背景,考查圆的方程、直线与圆的位置关系,考查考生的运算求解能力和逻辑推理能力,弘扬和传承魅力无穷的数学文化,激发学生学习数学的乐趣和内在动力.

例 3　(2021·襄阳市模拟题)定义曲线 $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的“倒椭圆”.已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$,它的“倒椭圆” $C_2:\frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$ 的一个对称中心为______;过“倒椭圆” C_2 上的点 P 作直线 PA 垂直 x 轴于点 A,作直线 PB 垂直 y 轴于点 B,则直线 AB 与椭圆 C_1 的公共点个数为______.

答案:$(0,0)$;1.

点评　本题给出“倒椭圆”的概念让学生领悟,在弄懂新概念的基础上,结合已有的数学知识和方法,即可顺利解决问题.本题是“双空题”,是新高考惯用的一种创新题型.

2　创设新的情景

例 4　(2021·泉州市模拟题)圆锥曲线的光学性质(如图 1,图 2 所示,其中 F_1,F_2 分别为椭圆(双曲线)的左、右焦点)在建筑、通讯、精密仪器制造等领

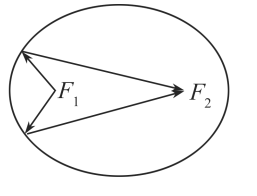

图 1

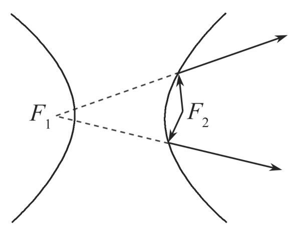

图 2

域有着广泛的应用.如图 3,一个光学装置由有公共焦点 F_1,F_2 的椭圆 C 与双曲线 C' 构成,一光线从左焦点

F_1发出,依次经过C',C反射,又回到点F_1,历时m秒;如图4,若将装置中的C'去掉,则该光线从点F_1发出,经过C反射两次后又回到点F_1,历时n秒.若C与C'的离心率之比为$\frac{1}{3}$,则$\frac{m}{n}=$______.

解析 设椭圆的长半轴长为a_1,双曲线的实半轴长为a_2.

在图3中,由椭圆的定义得$|BF_1|+|BF_2|=2a_1$①,由双曲线的定义得$|AF_2|-|AF_1|=2a_2$②,①-②得$|AF_1|+|AB|+|BF_1|=2a_1-2a_2$,所以$\triangle ABF_1$的周长为$2a_1-2a_2$.在图4中,光线从椭圆的一个焦点$F_1$发出,经椭圆反射后经过椭圆的另一个焦点$F_2$,即直线$ED$过点$F_2$,所以$\triangle EDF_1$的周长为$4a_1$.又$C$与$C'$焦点相同,离心率之比为$\frac{1}{3}$,所以$a_1=3a_2$.

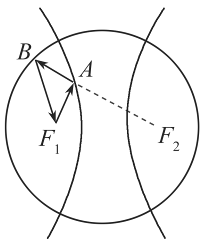

图3

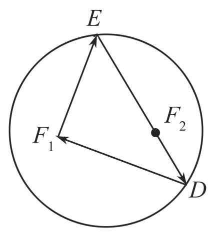

图4

注意到两次所用时间分别为m,n,光线速度相同,所以$\frac{m}{n}=\frac{2a_1-2a_2}{4a_1}=\frac{6a_2-2a_2}{12a_2}=\frac{1}{3}$.

点评 本题给出的情景新颖别致,考查椭圆和双曲线的定义与光学性质,破解此题的关键是利用椭圆和双曲线的定义与光学性质,分别求出图3中光线经历的路程为$2a_1-2a_2$,图4中光线经历的路程为$4a_1$.

例5 (2021·宜昌市模拟题)“嫦娥四号”探测器于2019年1月在月球背面成功着陆.如图5所示,假设“嫦娥四号”卫星沿地月转移轨道飞向月球后,在月球附近一点P变轨进入以月球球心F为一个焦点的椭圆轨道Ⅰ绕月飞行,之后卫星在P点第二次变轨进入仍以F为一个焦点的椭圆轨道Ⅱ绕月飞行,若用e_1和e_2分别表示椭圆轨道Ⅰ和Ⅱ的离心率,则(　　).

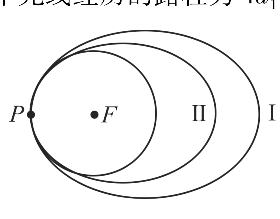

图5

A. $e_1>e_2$　　B. $e_1<e_2$　　C. $e_1=e_2$

D. e_1与e_2的大小关系不能确定

答案:选A.

点评 本题以“嫦娥四号”探月卫星的运行轨道为载体,考查椭圆的几何性质,穿插考查不等式的基本性质,激发学生的爱国热情和民族自豪感.

3 设置新的交汇

例6 (2021·成都市模拟题)已知双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别是$F_1,F_2$,点$P$是双曲线$C$右支上异于顶点的点,点$H$在直线$x=a$上,且满足$\overrightarrow{PH}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{PF_1}}{|\overrightarrow{PF_1}|}+\frac{\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_2}|}\right),\lambda\in\mathbf{R}$.

若$5\overrightarrow{HP}+4\overrightarrow{HF_2}+3\overrightarrow{HF_1}=\mathbf{0}$,则双曲线$C$的离心率为(　　).

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

答案:选C.

点评 本题是双曲线与平面向量的交汇综合题,根据条件可确定H在$\angle F_1PF_2$的平分线上,结合点H在直线$x=a$上,可知H是$\triangle PF_1F_2$的内心,由$5\overrightarrow{HP}+4\overrightarrow{HF_2}+3\overrightarrow{HF_1}=\mathbf{0}$,可求出$|F_1F_2|:|PF_1|:|PF_2|=5:4:3$,再利用双曲线的定义即可求解.

例7 (2021·武汉市模拟题)如图6,已知抛物线C:$y^2=4x$,过点$A(1,2)$作抛物线C的弦AP,AQ.设直线PQ过点$T(5,-2)$,则以PQ为底边的等腰$\triangle APQ$的个数为(　　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

答案:选A.

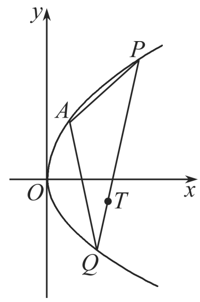

图6

点评 本题是抛物线与函数相交汇的综合题,设出直线PQ的方程为$x=my+n$,由解析几何和平面几何知识得到关于m的方程$m^3+m^2+3m-1=0$,构造函数并结合函数的单调性和零点存在性定理可知,该方程有唯一实根,进而得到满足条件的等腰$\triangle APQ$有且只有一个.

例8 (2021·江苏四校联考题)(多选)如图7,已知正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的棱长为2,M为DD_1的中点,N为正方形$ABCD$内一动点,则下列结论中正确的是(　　).

A.若$MN=2$,则MN中点的轨迹长度为π

B.若N到直线BB_1与到直线DC的距离相等,则N的轨迹为抛物线的一部分

C.若D_1N与AB所成的角为$60°$,则N的轨迹为双曲线的一部分

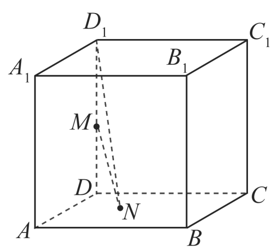

图7

D.若 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$,则 N 的轨迹为椭圆

解析　对于 A,连接 DN,因为 $MN=2$,$MD=1$,$MD\perp DN$,所以 $DN=\sqrt{3}$,则 MN 的中点到 MD 的中点的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 MN 的中点的轨迹是以 MD 的中点为圆心,$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径且平行于平面 $ABCD$ 的$\frac{1}{4}$ 圆周,其长度为$\frac{1}{4}\times 2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$,故 A 错误.

对于 B,连接 NB,因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$,$NB\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $NB\perp BB_1$,所以 NB 之长即为 N 到直线 BB_1 的距离,在平面 $ABCD$ 内,点 N 到定点 B 的距离与到定直线 DC 的距离相等,所以点 N 的轨迹就是以 B 为焦点,DC 为准线的抛物线的一部分,故 B 正确.

对于 C,如图 8,以 D 为原点,分别以 DA,DC,DD_1 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系,则 $A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$D_1(0,0,2)$,设 $N(x,y,0)(0<x<2,0<y<2)$,$\overrightarrow{D_1N}=(x,y,-2)$,$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$,$\cos60°=\frac{|\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{DN}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|2y|}{\sqrt{x^2+y^2+4}\times 2}=\frac{1}{2}$,化简得 $3y^2-x^2=4(0<x<2,0<y<2)$,所以 N 的轨迹为双曲线的一部分,故 C 正确.

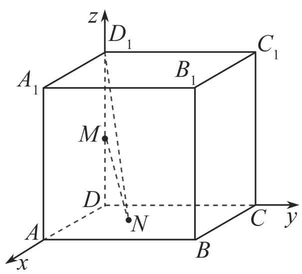

图 8

对于 D,易知 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle MND$,所以 $\angle MND=60°$,则 $DN=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以点 N 的轨迹是以 D 为圆心,$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为半径的$\frac{1}{4}$ 圆周,故 D 错误.

故选 BC.

点评　本题是立体几何与解析几何的交汇综合题,紧扣圆的定义、抛物线的定义,可判断 A,B,D 三个选项的正误,对于 C 选项,建立空间直角坐标系,利用向量的工具性得点 N 的坐标需满足的等式,即可判断 C 选项的正误.

4　建模新的应用

例 9　(2021·南京市模拟题)如图 9 所示,抛物面天线是指由抛物面(抛物线绕其对称轴旋转所成的曲面)反射器和位于其焦点上的照射器(馈源,通常采用喇叭天线)组成的单反射面型天线,广泛应用于微波和卫星通讯等,具有结构简单、方向性强、工作频带宽等特点. 图 10 是图 9 的轴截面,A,B 两点关于抛物线的对称轴对称,F 是抛物线的焦点,$\angle AFB$ 是馈源的方向角,记为 θ. 焦点 F 到顶点的距离 f 与口径 d 的比值$\frac{f}{d}$ 称为抛物面天线的焦径比,它直接影响天线的效率与信噪比等. 如果某抛物面天线的焦径比等于 0.5,那么馈源的方向角 θ 的正切值为______.

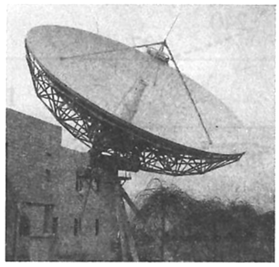

图 9

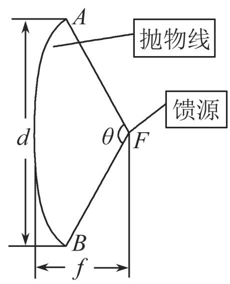

图 10

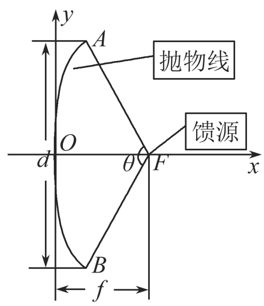

图 11

解析　建立如图 11 所示的平面直角坐标系,设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$,则 $f=\frac{p}{2}$,又$\frac{f}{d}=0.5$,所以 $d=p$,因为 A,B 两点关于 x 轴对称,所以 A,B 的纵坐标分别为$\frac{p}{2}$,$-\frac{p}{2}$,则 $A\left(\frac{p}{8},\frac{p}{2}\right)$,$B\left(\frac{p}{8},-\frac{p}{2}\right)$,直线 BF 的斜率 $k=\frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}-\frac{p}{8}}=\frac{4}{3}$,由抛物线的对称性可知直线 BF 的倾斜角等于$\frac{\theta}{2}$,所以 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{4}{3}$,所以

$$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}=-\frac{24}{7}.$$

点评　本题考查抛物线的几何性质、直线的斜率公式、二倍角公式. 考查的学科素养是理性思维、数学应用、数学探索.

(下转封底)

(上接 25 页)

例 10 (2021·长沙市模拟题)某城市决定在夹角为 30° 的两条道路 EB,EF 之间建造一个半椭圆形的主题公园,如图 12 所示,$|AB| = 2$ 千米,O 为 AB 的中点,OD 为椭圆的长半轴,在半椭圆形区域内再建造一个三角形游乐区域 OMN,其中 M,N 在椭圆上,且 MN 的倾斜角为 45°,MN 交 OD 于 G.

(1)若 $|OE| = 3$ 千米,为了不破坏道路 EF,求椭圆长半轴的最大值;

(2)若椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,当 $|OG|$ 为何值时,游乐区域 $\triangle OMN$ 的面积最大?

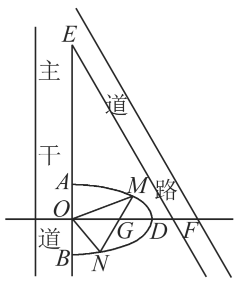

图 12

分析 (1)建立恰当的平面直角坐标系,得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1(a > 1)$,由题意求出直线 EF 的方程,把直线 EF 的方程与椭圆方程联立,利用直线 EF 与半椭圆至多有一个交点,得 a 所满足的不等式,解不等式得 a 的取值范围,从而得椭圆长半轴长的最大值;(2)求出椭圆方程,设 $G(m,0)$,根据题意设出直线 MN 的方程,联立直线 MN 的方程与椭圆方程,利用根与系数的关系表示出 $\triangle OMN$ 的面积,利用基本不等式,即可求出游乐区域 $\triangle OMN$ 面积的最大值及相应的 $|OG|$ 的值.

答案:(1)椭圆长半轴长的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$;

(2)当 $|OG|$ 为 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 千米时,游乐区域 $\triangle OMN$ 的面积最大.

点评 本题是以半椭圆为背景的实际应用题,考查考生的数学建模能力和运算求解能力,是一道优秀的创新题.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2020 年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020.6.

[2] 杜志建.2022 新高考优秀模拟试卷汇编 45 套·数学[M].乌鲁木齐:新疆青少年出版社,2021.6.

作者简介 王勇(1965—),男,湖北随州人,特级教师,正高级教师(三级教授);主要研究高中数学教育与教学;国家级、省级学术期刊上发表论文 1800 余篇,在全国各地讲学 200 余场.

张华丽(1976—),女,湖北枣阳人,高级教师;主要研究高中数学教育与教学.