

极值点偏移问题的常见解法

——以 2021 年高考数学新高考 I 卷第 22 题为例

宗欣妍 (苏州大学数学科学学院 2019 级基地班 215006)

摘要:极值点偏移问题在近几年高考及各种模考中通常以压轴题的形式出现,这类问题对数学思维能力和基本功要求较高,体现了转化化归、数形结合、函数与方程等数学思想,注重数学核心素养的考查.本文以 2021 年新高考数学 I 卷的压轴题为例,给出了极值点偏移问题的常用解法.

关键词:极值点偏移;解题方法;高考数学题

文章编号:1004-1176(2022)05-0064-02

极值点偏移问题以导数为背景,考查学生运用函数与方程、数形结合、转化与化归等思想解决问题的能力.此类问题呈现形式往往比较简洁,涉及函数的双零点,是多元函数问题.

1 极值点偏移的概念

若函数 $f(x)$ 满足对定义域内任意自变量 x 都有 $f(x) = f(2x_0 - x)$, 则函数 $f(x)$ 关于直线 $x = x_0$ 对称;可以理解为函数 $f(x)$ 在对称轴两侧,函数值变化快慢相同,且若 $f(x)$ 为单峰(谷)函数,则 $x = x_0$ 必为 $f(x)$ 的极值点.若 $f(x) = c$ 的两根中点为 $\frac{x_1 + x_2}{2}$, 则 $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$, 即极值点在两根的正中间,也就是极值点没有偏移.

若相等变为不等,即 $\frac{x_1 + x_2}{2} \neq x_0$, 则为极值点偏移.若单峰(谷)函数 $f(x)$ 的极值点为 x_0 , 且函数极值点 x_0 左右两侧变化快慢不同,故单峰(谷)函数 $f(x)$ 在定义域内任意不同的实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 与极值点 x_0 必有确定的大小关系:

(1) 若 $x_0 < \frac{x_1 + x_2}{2}$, 则称为极值点左偏(如图 1、图 2).

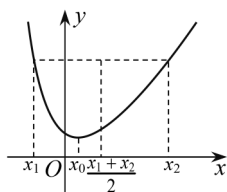


图 1

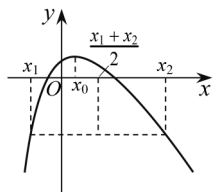


图 2

(2) 若 $x_0 > \frac{x_1 + x_2}{2}$, 则称为极值点右偏(如图 3、图 4).

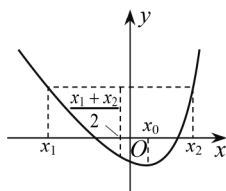


图 3

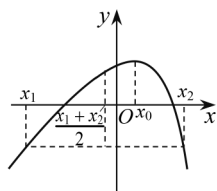


图 4

2 原题再现

(2021 年新高考数学 I 卷第 22 题) 已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$. (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性; (2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b \ln a - a \ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

此题以基本初等函数为背景, 主要考查了函数的单调性、利用导数证明不等式, 考查了函数与方程、数形结合、转化与化归等思想方法, 并突出考查了学生分析问题和解决问题的能力.

该题的第(1)题通过求导分析可得 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 而第(2)题首先要进行形式上的化简, 尽量往此题原函数 $f(x)$ 的形式上转化. 因此 $b \ln a - a \ln b = a - b$ 可变形为 $b(\ln a + 1) = a(\ln b + 1)$, 即 $\frac{\ln a + 1}{a} = \frac{\ln b + 1}{b}$, 若令 $x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = \frac{1}{b}$, 则第(2)题即为 $f(x_1) = f(x_2)$ 时证明 $2 < x_1 + x_2 < e$. 这样该题就是一道很典型的极值点偏移问题.

3 方法剖析

3.1 构造极值对称差函数

函数 $f(x)$ 的极值点为 x_0 , 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 要证 $x_1 + x_2 > 2x_0$ (或 $x_1 + x_2 < 2x_0$), 往往构造对称差函数 $F(x) = f(x) - f(2x_0 - x)$ ($x < x_0$), 研究 $F(x)$ 的单调性, 结合 $F(x_0) = 0$ 判断 $F(x)$ 的符号, 进而得到 $f(x)$ 与 $f(2x_0 - x)$ 的大小关系, 即 $f(x_1) = f(x_2)$ 与 $f(2x_0 - x)$

x_1)的大小关系,最后利用 $f(x)$ 的单调性得到 x_2 与 $2x_0 - x_1$ 的大小关系.

因此该题结合第(1)问单调性,构造差函数 $F(x) = f(x) - f(2-x) = x(1 - \ln x) - (2-x)[1 - \ln(2-x)]$ ($x < 1$),求导可得 $F'(x) = -\ln x - \ln(2-x)$, $F''(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} = \frac{2(x-1)}{x(2-x)}$. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $F''(x) < 0$, 故 $F'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,此时 $F'(x) > 0$, $F(x) < F(1) = 0$, 即 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < f(2-x)$. 根据 $f(x_1) = f(x_2)$, 不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 则 $f(x_1) < f(2-x_1)$, 即 $f(x_2) < f(2-x_1)$. 根据第(1)题可知 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,且 $x_2, 2-x_1 \in (1, +\infty)$, 即得 $x_2 > 2-x_1$, 即 $x_1 + x_2 > 2$, 得证.

点评 构造对称差函数是极值点偏移问题的一种通性解法, 主要用来解决两数和或者积与极值点相关的不等式证明问题. 本题求证的不等式中含有两个变量, 对于此类问题一般的求解思路是将两个变量分到不等式的两侧, 然后根据函数的单调性, 通过两个变量之间的关系“减元”, 建立新函数, 最终将问题转化为函数的单调性来求解.

事实上, 有关极值点偏移的问题在高中阶段大多与指对数函数相关, 而双变量的不等关系自然也可以捆绑借助对数平均不等式链来解决.

3.2 利用对数平均不等式

两正数 a, b 的对数平均定义是 $L(a, b) = \begin{cases} \frac{a-b}{\ln a - \ln b}, & a \neq b, \\ a, & a = b. \end{cases}$ 对数平均与算数平均、几何

平均的大小关系是 $\sqrt{ab} \leq L(a, b) \leq \frac{a+b}{2}$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号).

当 $a > b$ 时, $\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$, 即 $\frac{\sqrt{ab}}{a-b} < \frac{1}{\ln \frac{a}{b}} < \frac{a+b}{2(a-b)}$, 即 $\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} > \ln \frac{a}{b} > \frac{2\left(\frac{a}{b} - 1\right)}{\frac{a}{b} + 1}$, 即对任意的 $x > 1$,

$\frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $\ln t^2 < t - \frac{1}{t}$, 即对任意的 $x > 1$, $\frac{2(x-1)}{x+1} <$

$\ln x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$. 同理可得对任意的 $0 < x <$

$1, \frac{2(x-1)}{x+1} > \ln x > \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

由题意 $\frac{\ln a + 1}{a} = \frac{\ln b + 1}{b}$, 不妨设 $0 < a < 1 < b$, 则 $\frac{\ln a + 1}{a} > \frac{\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) + 1}{a}$, $\frac{\ln b + 1}{b} < \frac{\frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{b}\right) + 1}{b}$, 即 $\frac{\frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{b}\right) + 1}{b} > \frac{\ln b + 1}{b} > \frac{\frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{b}\right) + 1}{b}$, 化简得 $1 - \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} < 1 - \frac{1}{b^2} + \frac{2}{b}$, 即得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$.

这里要说明的是, 对数不等式在考场上并不能直接使用, 用必证之(证明见文[1]).

点评 应用对数平均不等式链来证明双变量不等式, 思路简捷、别具新意、易于理解和掌握, 在证明解答题时要“先证后用”. 对数平均不等式的运用是近几年数学竞赛、高考数学命题的理论背景, 它包含多个不等式, 为我们提供了多种巧妙放缩的途径, 我们可以根据证明的需要合理选取其中一个来达到不等式证明的目的.

3.3 消元构造一元函数

原题的右边需证明 $x_1 + x_2 < e$, 如果用方法1来构造差函数, 会用到部分高等数学中的极限知识. 因此这里构造差函数并不是最好的方法, 可以考虑放缩消元或者齐次消元.

方法1 根据 $f(x_1) = f(x_2)$, 即 $x_1(1 - \ln x_1) = x_2(1 - \ln x_2)$, 且 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 可得 $x_1(1 - \ln x_1) > x_1$, 故 $x_1 + x_2 < x_1(1 - \ln x_1) + x_2 = x_2(1 - \ln x_2) + x_2 = x_2(2 - \ln x_2)$. 构造函数 $h(x) = x(2 - \ln x)$ ($x > 1$), 求导可得 $h'(x) = 1 - \ln x$. 当 $x \in (1, e)$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$. 故 $h(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(x) \leq h(e) = e$, 即 $x_1 + x_2 < e$ 得证.

方法2 根据 $f(x_1) = f(x_2)$, 即 $x_1(1 - \ln x_1) = x_2(1 - \ln x_2)$, 且 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 可以令 $t = \frac{x_2}{x_1}$ ($t > 1$), 即 $x_1(1 - \ln x_1) = tx_1(1 - \ln tx_1)$, 解得 $\ln x_1 = 1 - \frac{t \ln t}{t-1}$, 故 $x_1 + x_2 = (1+t)x_1 = (1+t)e^{1 - \frac{t \ln t}{t-1}}$. 因此, 要证 $x_1 + x_2 < e$, 只要

一道课本习题的溯源、破解与思考

张志刚 (山东省宁阳县复圣中学 271400)

摘要:对一道最大张角教材习题进行深度剖析,探寻题目的本质与历史渊源,提出问题的直观感知和代数论证的解决方案,并就问题中蕴含的核心素养价值进行了解读.

关键词:米勒问题;核心素养;直观想象;数学建模

文章编号:1004-1176(2022)05-0000-00

徐章韬教授提出,理想的课堂是“学术”“技术”“艺术”三“术”交织的课堂.作为教师,其修为要能“上通数学、下达课堂”,能做“顶天立地”之事.然三“术”的发展具有序列性,先要解决一些“技术”问题,首先表现在教师能深刻研读教材,能看到教材背后的“微言要义”.课程教材承载的是传统成熟内容,是数学工作者集体智慧的结晶,不仅具备完整的学科知识体系,同时也是教师实施教学和学生学习的重要材料,而作为教材重要组成部分的习题理应置于显著的位置上.众多高考试题和竞赛试题都是从课本例题或习题出发,经过改编、综合、拓展、嫁接而来,具体表现为:课本例题、习题数据的变更,课本例题、习题条件的拓展,课本例题、习题背景的变换,课本例题、习题的应用等^[1].对典型习题的深度挖掘有利于我们发现问题的内涵和本质,“揭秘”题目背后的故事与历史渊源,概括归纳深藏其中的思维主线,以此为中心推而广之,可以收到以一敌百的良好成效.

证 $(1+t)e^{\frac{1}{1+t}} < e$, 即证 $1+t < e^{\frac{1}{1+t}}$. 于是只要证 $(t-1)\ln(1+t) - t\ln t < 0$ 在 $t > 1$ 时恒成立. 继而构造一元函数 $\varphi(t) = (t-1)\ln(1+t) - t\ln t$ ($t > 1$), 求得 $\varphi'(t) = \ln(1+t) + \frac{t-1}{1+t} - \ln t - 1 = \ln \frac{1+t}{t} - \frac{2}{1+t} < \frac{1+t}{t} - 1 - \frac{2}{1+t} = \frac{1-t}{t(1+t)} < 0$ 恒成立. (这里有一个重要的对数切线不等式 $\ln x \leq x-1$ 的放缩, 需证明)

所以 $\varphi(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $t > 1$ 时, $\varphi(t) = (t-1)\ln(1+t) - t\ln t < \varphi(1) = 0$, 即得证 $x_1 + x_2 < e$.

点评 上述两种解答都充分体现了数学核心素养对解题的思路引领. 两种解法分别建立了对应的数学模型, 通过逐步深入的逻辑推理和数据分析、数学运算简化问题, 最后使问题得以轻松解决. 放缩法是证明不等式的常用方法, 方法 1 利

效. 事实上, “小题深挖”“一题多法”“一题多变”“多题一法”充分体现了教学的简约性功能, 能在尽可能短的时间内传播尽可能多的数学思想, 对题海战术也是一种“反制”, 历来都是我国习题课教学的宝贵经验, 在继承与发展的道路上, 我们应使其焕发新的生机. 下面举例说明.

1 题目再现

普通高中课程标准试验教科书必修《数学 5》(人教版 2007 年 1 月第 3 版, A 版) 第 101 页习题 3.4B 组第 2 题: 如图 1, 树顶 A 离地面 a m, 树上另一点 B 离地面 b m, 在离地面 c m 的 C 处看此树, 离此树多远时视角最大?

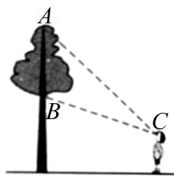


图 1

2 问题剖析

2.1 问题探源

本题源于历史上经典的米勒问题. 1471 年, 德国

用不等式性质放缩, 方法 2 利用对数切线不等式 $\ln x \leq x-1$ 进行有目标的放缩, 能达到事半功倍的效果. 其中利用比(差)值代换是解决极值点偏移的另一种简单快捷的方法, 利用两数之比(差)作为变量 t , 继而将所求解问题转化为关于 t 的函数问题求解, 将双变量问题转化为单变量问题, 从而实现消元的目的.

极值点偏移问题在全国高考中属于高频题型, 此类问题由浅入深, 对计算难度、思维深度的要求逐步提高, 很好地体现了数学的科学性、应用性和创造性. 解决这类问题, 本质上就是将双变量问题转化为单变量问题, 建立相应的数学模型, 通过逐步深入的逻辑推理和数据分析、数学运算简化问题, 最后使问题得以轻松解决.

参考文献

- [1] 陈宽宏. 对数平均与高考压轴题[J]. 数学通讯, 2012(11): 34-37.