由一道解析几何题引发的“识图”思考*

江苏省滨海中等专业学校 224500 梁永年

【摘 要】 解析几何学习中既包含代数运算,又包含对平面图形的认识和处理,充分认识所研究的几何图形,提高学生几何图形的分析能力,把握所研究对象的几何特征,学会在运算过程中利用图形的几何特征来简化运算,提高运算效率,是解析几何教学中必须予以重视的问题.

【关键词】 解析几何;识图;教学反思

圆锥曲线是解析几何中的核心内容,谈到解析几何问题的解决,许多学生认为就是复杂的计算,没有规律可循,其实这是对解析几何学习的一种片面认识.解析几何的本质是用代数方法研究几何问题,几何是根本,运算是有数形结合特征的运算,而不仅仅是代数运算,所以加强解析几何中识图教学显得非常有必要.章建跃博士指出:用数形结合思想研究曲线,应贯彻先用几何眼光观察与思考,再用坐标法解决的策略[1],让学生参与到学会识图的过程中,引导学生注意运算与几何的相互为用,有目的地引导学生学会分析几何图形的要素及其基本关系,再用代数语言表达,这样能够拓展解题视野,优化运算求解过程,教师只有注意渗透、反复强化这种解题策略并贯穿解析几何学习的全过程,学生才能从繁琐的运算中解脱出来,从而不断提高学生分析问题和解决问题的能力.下面这道解析几何题有丰富的几何特征,通过多角度的识图,开辟不同的解题途径,谈一点自己的思考.

1 试题再现

最近,我校高三检测考试选取了下列这道解析几何题作为压轴题:

题 1 如图 1,已知点 A,B 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上,点 A 在第一象限,O 为坐标原点,且 $OA\perp AB$.

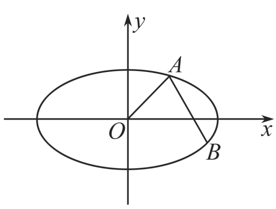

图 1

(1) 若 $a=\sqrt{3}$,$b=1$,直线 OA 的方程为 $x-3y=0$,求直线 OB 的斜率;

(2) 若 $\triangle OAB$ 是等腰三角形(点 O,A,B 按顺时针排列),求 $\frac{b}{a}$ 的最大值.

第一问只要根据条件列式求解,难度不大,从学生做题的效果来看,全班学生都能正确解答,学生第二问普遍不会解,正确率很低,能够动笔写一点有效过程的学生很少,究其原因找不到解题思路,虽然这道题有一定难度,但如此低的正确率还是不应该,要求学生完全正确解答,也确有难度,但完全找不到解题思路,一点过程也写不出,似乎不正常.

2 问题分析

对于第(2)小题,笔者对所在班级的学生做了调查:一是目标函数难以建立,$\frac{b}{a}$ 究竟用什么量表示,难以下手;二是部分学生试图通过设直线 OA 的斜率表达 A,B 两点坐标,虽只有一个变量,但面对复杂数据难以求出 B 点坐标;三是部分学生试图通过设 A,B 两点坐标,进行求解,由于变量较多而无法求解.

本题看似平淡,但学生对等腰直角三角形这个条件,认识不深,不能由此找到合理的解题思路.究其原因,是学生识图能力不强所致.他们不能根据“直角”和“等腰”这两个要素,转化至合理的代数运算.因此,需要加强识图能力的教学,引导学生对图形进行多角度分析、深入思考,与学生共同分析比较图形的不同表征,让他们学会代数运算与几何直观的相互转化,得到不同的解题方法,从而找到合理的解题思路.

3 必要性分析

在解析几何教学中,是否有必要加强识图教学?再看下面题 2:

* 基金项目 第四期江苏省教育科学研究院职业教育教学研究 2019 年度立项课题“中职数学教学‘最优化课堂’体系构建的案例研究”(登记号:ZYB187).

题 2　如图 2,已知点 A,B,M,N 为抛物线 $y^2=2x$ 上四个不同的点,直线 AB 与直线 MN 相交于点$(1,0)$,直线 AN 过点$(2,0)$.

(1) 记 A,B 的纵坐标分别为 y_1,y_2,求 y_1y_2 的值;

(2) 记直线 AN,BM 的斜率分别为 k_1,k_2,是否存在实数 λ,使得 $k_2=\lambda k_1$? 若存在,请求出 λ 的值;若不存在,请说明理由.

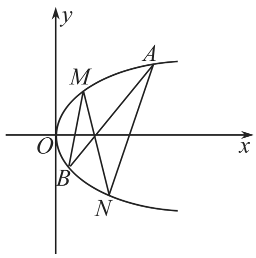

图 2

仔细分析这道题的图形特征,就是要由三个三点共线(点 $A,(1,0),B$ 共线;点 $M,(1,0),N$ 共线;点 $A,(2,0),N$ 共线),得两条直线的斜率关系. 而且第(1)小题已经铺垫了一个三点共线(点 $A,(1,0),B$ 共线),可以通过不同方法得到 $y_1y_2=-2$. 设 M,N 的纵坐标分别为 y_3,y_4,由点 $M,(1,0),N$ 共线与点 $A,(2,0),N$ 共线,同理可得 $y_3y_4=-2$,$y_1y_4=-4$. 而 $k_2=\dfrac{y_3-y_2}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\dfrac{4}{y_3+y_2}$,$k_1=\dfrac{4}{y_4+y_1}$,只需运用上述三个等式将 y_2,y_3 转化为 y_1,y_4 即可.

所谓识图,就是要分析图形的形成过程,找到图形的基本关系和核心要素,再用代数语言表达出来,通过合理转化即完成解题. 像上述题 2,三个三点共线是基本关系,可运算得其代数关系式,通过消元转化,就可以研究两条直线的斜率关系. 因此,加强识图能力的教学,有助于解题思路的形成. 下文以问题为例,展示由识图到解题思路形成的教学过程,与读者交流研讨.

4　教学分析

4.1　初识图形

问题 1　这次考试的压轴题,有一定难度,但图形却不复杂,请同学们再分析一下图形的形成过程,找一找图形中的关键条件,思考怎样处理这些关键条件.

学生容易发现关键条件 $OA\perp AB$ 与 $OA=AB$,怎样从代数运算的角度刻画这两个条件呢? 只要设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,就有解题思路了.

由 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$,得 $x_1(x_2-x_1)+y_1(y_2-y_1)=0$. ①

由 $OA=AB$,得 $x_1^2+y_1^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$. ②

且 A,B 两点的坐标还满足 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ 与 $\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$. 本题即可利用这 4 个等式转化研究 $\dfrac{b}{a}$ 的最大值. 在此,要告诉学生一个道理,认真审题研究图形,就能找到解题思路,要大胆思考、要敢分析、要敢写,很多问题并不难. 当然,这是一个初级解题思路,还要引导学生敢于运算.

问题 2　这 4 个等式涉及多个字母,如何消元转化到求 $\dfrac{b}{a}$ 的最大值呢?

引导学生观察这 4 个等式,不难得到消元思路. 字母 a,b 保留,可尽量消去 x_2,y_2 或 y_1,y_2,4 个等式中,后 3 个等式都是平方项,显然由 ① 式消元.

由 ① 式得 $y_1-y_2=\dfrac{x_1}{y_1}(x_2-x_1)$,

代入 ② 式有 $x_1^2+y_1^2=(x_2-x_1)^2+\dfrac{x_1^2}{y_1^2}(x_2-x_1)^2=(x_2-x_1)^2\left(\dfrac{x_1^2+y_1^2}{y_1^2}\right)$,解得 $x_2=x_1+y_1$,$y_2=y_1-x_1$,

将 $A(x_1,y_1)$,$B(x_1+y_1,y_1-x_1)$ 代入椭圆方程,得 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ 与 $\dfrac{(x_1+y_1)^2}{a^2}+\dfrac{(y_1-x_1)^2}{b^2}=1$,两式相减即得目标 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{2x_1y_1-x_1^2}{2x_1y_1+y_1^2}$,齐次式求最值,留时间让学生运算,最终得 $\dfrac{b}{a}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt5-1}{2}$.

问题 3　上述解法是基本思路,不难想,只要大胆运算,运算量也不是想象的那么大. 当然,能不能运用弦长公式适当优化解法呢?

问题 3 解题思路并没有变化,只是引导学生灵活解题. 只要想到弦长公式,引入直线 OA 的斜率 k,即可淡化 y_1,y_2 的运算. 易得 $OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_1|$,$AB=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\,|x_1-x_2|$,所以 $|x_1|=\dfrac{|x_2-x_1|}{k}$,即 $x_2=x_1+y_1$,再由 $OA\perp AB$ 可得 $y_2=y_1-x_1$.

4.2　再识图形

问题 4　除了具备条件 $OA\perp AB$ 且 $OA=AB$ 是等腰直角三角形外,请同学们思考还有哪些条件能够满足是等腰直角三角形呢?

引导学生再次认识等腰直角三角形,并不难发现:由 $\angle AOB=45^\circ$ 与 $OB=\sqrt2 OA$,也能保证等腰直角三角形,这时可把 OA,OB 作为研究目标. 因此,又得到另一解题思路:研究 OA,OB 的斜率关系,研究 OA,OB 的交点处理长度 $OB=\sqrt2 OA$.

设直线 OA 斜率为 k,倾角为 θ,则 $k=\tan\theta$,由 $\angle AOB=45°$,得 $k_{OB}=\tan(\theta-45°)$,所以 $k_{OB}=\dfrac{k-1}{1+k}$.

由 $\begin{cases}y=kx,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $x_1^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$,所以 $OA^2=\dfrac{(1+k^2)a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$,同理可得 $OB^2=\dfrac{\left[1+\left(\dfrac{k-1}{1+k}\right)^2\right]a^2b^2}{b^2+a^2\left(\dfrac{k-1}{1+k}\right)^2}=\dfrac{2(1+k^2)a^2b^2}{b^2(1+k)^2+a^2(k-1)^2}$,由 $OB=\sqrt{2}OA$,得 $b^2k^2+2(b^2-a^2)k+a^2=0$,所以 $4(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\geqslant 0$,解得 $\dfrac{b}{a}\leqslant\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,当 $k=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 时取到最大值.

若有的学校教师补充过复数旋转的相关知识,还可引导学生从复数旋转的角度进一步认识图形.

问题 5　我们曾经补充过复数的相关知识,能不能运用复数知识解决这个问题?

容易发现,OB 逆时针旋转 45° 且长度变为原来的 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,即得 OA.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,分别对应于复数 $x_1+y_1\mathrm{i}$ 与 $x_2+y_2\mathrm{i}$,则 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x_2+y_2\mathrm{i})(\cos45°+\mathrm{i}\sin45°)=x_1+y_1\mathrm{i}$,所以 $(x_2-y_2)+\mathrm{i}(x_2+y_2)=2x_1+2y_1\mathrm{i}$,解得 $x_2=x_1+y_1$,$y_2=y_1-x_1$.(下同问题 2 的处理)

4.3　转换视角

解析几何是用代数方法研究几何问题的,既是几何问题,就不能忽略几何图形中隐含的信息.若能充分借用几何关系,深层次挖掘几何信息,探求问题本质,则可简化代数运算,使复杂问题简单化,有效提高解题效率.

问题 6　对于条件“等腰直角三角形 $\triangle OAB$”,能不能运用几何关系得到 A,B 两点的坐标关系?

学生虽知道初中几何知识,但长时间不运用,当然不能迅速解决问题 6.需要再引导,从几何的角度,研究点的坐标怎么处理?这时学生可能会想到作坐标轴的垂线,给点时间学生思考,他们能得到以下处理:

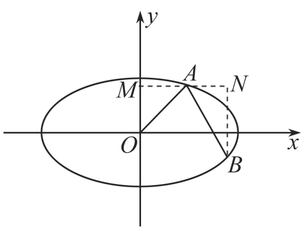

图 3

如图 3,过点 A 作 y 轴垂线交 y 轴于 M,过点 B 作 $BN\perp AM$ 于 N,由 $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形,易得 $\triangle AOB\cong\triangle ANB$,容易得到 $OM=AN$,$AM=BN$,从而得到 A,B 两点的坐标关系.

本题最为简洁的解法,在问题中所涉及的几何要素上加强引导学生“识图”,代数式的化简、方程的变形与转化都起着很重要的作用,在不同的解法中比较,细节不同的处理,需要循序渐进地引导学生感悟.

问题 7　若将等腰直角三角形 $\triangle OAB$,改为 $\angle AOB=60°$ 的直角三角形,怎么处理?请同学们根据本节课的研究,从不同的角度认识这个问题.

问题 7 作为课后思考题的主要目的,一是激发学生研究的热情;二是让学生进一步认识这类图形的本质.这样将数形结合思想方法融入到具体的问题解决过程中,使学生在实践中加深“识图”的理解,逐步养成数形结合解决解析几何问题的思维习惯.

5　教学反思

通过这道例题,有效识图,灵活处理运算的多元表征,尝试每种几何特征下的运算量,合理规划运算路径.学生在解题实践中有意识地去感悟不同识图方式带来的多种解法,分析不同解法带来的运算量和表达方式的差异.通过分析运算条件、探究运算方向、设计运算途径,不仅让学生体会利用等腰直角三角形的性质解决问题,而且通过识图带来不同解法的比较,其中更有简捷、优美的解法,体现了多想少算的原则和较高的理性思维水平,使学生也体会了解析几何运算中所具有的特点:先分析清楚研究对象的几何特征,学会有效认识图形中的角度、长度、位置关系,把握所研究对象的几何特征、明确面临的几何问题,找到合理的几何关系,将几何元素及其关系代数化,在运算过程中充分利用相应的几何特性来简化运算,使复杂问题简单化,然后运算推理和求解,这是化解数学运算难点的重要举措.通过不断探索、归纳和总结的体验和感悟,积累运算经验,寻求合理简洁的运算途径,从而提升解析几何问题解决能力,提高学生数学核心素养.

参考文献

[1]　章建跃.利用几何图形建立直观　通过代数运算刻画规律[J].数学通报,2021(08):1-10.

作者简介　梁永年(1978—),男,江苏滨海人,中学高级教师,盐城市高中数学教学能手,2020 年 10 月获盐城市基础教育成果一等奖,2021 年 1 月获江苏省教科研先进个人;主要研究高中数学教育与教学.