3 结语

深度学习强调学习要在知识理解的基础上发生,通过对知识的再背景化、再情境化,还原知识的真实面貌,让学习者与知识的原初与本质相遇;强调学习者认知、情感、态度、行为的高投入性和学习过程的沉浸性;强调学习者能够在众多知识与思想间建立关联,把握学科的核心思想、意义与本质[3].教师、学生作为教学系统的两个核心要素,都需要全新的思想理解深度学习,让自己成为深度学习的动力源,培养学生的高阶思维.

参考文献

[1] 张良,杨艳辉.核心素养的发展需要怎样的学习方式[J].比较教育研究,2019(10):29-36.

[2] 孙庆华,包芳勋.复数的历史发展及在中国早期的传播[J].西北大学学报(自然科学版),2006(03):502-506.

[3] 张晓娟,吕立杰.SPOC平台下指向深度学习的深度教学模式建构[J].中国电化教育,2018(04):96-101.

作者简介 张阳(1976—),男,江苏苏州人,中学数学高级教师.研究方向:数学现象教学与具身课堂.苏州市学科带头人.

基于过程性教学的“函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象”教学设计

江西师范大学数学与统计学院 330022 董丽平 刘锡光

【摘 要】 数学教学不仅要注重知识性目标的达成,更要关注过程性目标的落实,实现过程性目标需要强调学生自主参与学习过程,经历数学知识的发生发展过程,并获得经历与体验,由此提升数学核心素养.本文以“函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象”教学设计为例,分析课堂教学环节如何实现过程性目标,体会数学教学中的过程性意义.

【关键词】 过程性教学;三角函数;教学设计

《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出“高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质”.数学教学不仅要让学生掌握知识,还要经历知识的形成过程,理解知识的本质,提高发现问题、研究问题的能力,这就需要开展“过程性教学”,本文以“函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象”教学设计为例,旨在研究其教学中的过程性意义.

1 过程性教学的要义

过程性教学是指在数学课堂中落实过程性目标的教学.过程学鼻祖怀特海在《过程与实在》中提出:“实体如何形成的方式构成了实体是什么内容……它的‘存在’由它的‘形成性’所组成,这就是过程的原则”[1].并且进一步指出:“教学设计的学习目标必须源于对生命价值和意义提升的冲动,其目的是引起和指导思维和思想自由的展开,而具体目标是不可知的,只有这个思维和思想的展开过程是实在的”[2].这种过程性教育思想为教学设计展示了不同的视角.当今的学习心理学也认为,学生的数学学习是基于学生已有认知结构基础之上的主动建构过程,并且这一过程是一个动态的再创造学习过程.所以,过程性教学揭示了数学发生发展的过程,揭示了人类思维发展的过程,其教学反映学生数学学习的心理过程和认知规律,真正体现了学生数学知识的建构过程.

2 教学设计要素分析

2.1 内容及教学重点

“函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象”选自北师大版高中数学必修四第一章第八节的内容.是在研究了正、余弦函数的图象和性质基础之上,进一步研究生活中常见的函数类型,本节课将学习函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象及参数 A、ω、φ 对函数图象的影响,进一步理解函数图象变换的本质,是后续学习“三角函数的应用”和“三角恒等变换”的重要基础与铺垫.基于以上分析,确立本节课的教学重点为:函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象以及参数 A、ω、φ 对图象变换的影响.

2.2 学情及教学难点

学生在之前学习中已掌握“五点作图法”,了解借助单位圆用正弦线作图的原理,教师也使用过几何画板直接作图.但高一学生抽象概括能力较低,需借助具体事物帮助理解建立模型,抽象概括出图象变换的规律.学生虽对“左加右减”“上加下减”有粗略的浅显认识,但要理解函数图象变换的本质及三个参数对函数图象的影响且图象变换方法不唯一,这对学生来说理解掌握起来难度较大.

2.3 教学目标及教学方法

(1)教学目标:

①通过具体匀速圆周运动实例,抽象并建立函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的数学模型;

② 理解 A、ω、φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响,经历 $y=\sin x$ 到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象变换的过程,体会化归和数形结合思想,提升直观想象和逻辑推理素养;

③ 通过观察图象、代数论证,理解函数图象变换的本质,通过对问题的自主探究、合作交流,培养独立思考能力和团结协作的精神.

(2) 教学方法:采用探究发现为主,启发诱导为辅的教学方法.

3 教学过程

3.1 创设情境,建立模型

问题 1:现实生活中有哪些周而复始的现象?

问题 2:如何用数学的方法来刻画现实世界中周而复始的现象呢?

选取与学生生活联系紧密的例子摩天轮作为引入,利用动画演示摩天轮的转动,并设置问题:摩天轮半径为 Am$(A>0)$,且按逆时针做匀速转动,角速度为 ωrad/min$(\omega>0)$,其圆心到地面的高度为 b.当摩天轮上的任一点 P 运动到某点 P_0 处时开始计时.你能确定 x(min) 时刻时点 P 的坐标吗?

问题 3:圆是刻画周期性运动最简洁的数学模型,你还能借助单位圆继续发挥圆的作用来研究摩天轮问题吗?

如图 1,以摩天轮圆心为原点建立平面直角坐标系,并追问:

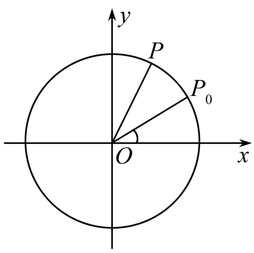


图 1

① 该函数模型的自变量、因变量分别是什么? 为什么?

② 若要研究摩天轮上某点 P 的纵坐标 y 与时间 x 的关系,你能试着分析出 y 关于 x 的一般函数解析式吗?

设计意图 过程性教学注重揭示知识的来龙去脉,故以学生熟悉的摩天轮引入,目的在于帮助学生搭建“脚手架”探究出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的解析式,体会学习函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的必要性,感悟其是刻画自然界周期现象常见的数学模型.

3.2 探究新知,制定策略

经上述探究,让学生经历得出 y 关于 x 的一般函数解析式为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的过程.为了研究的简便,先研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$,将其研究清楚后,只要向上平移 b 个单位即可得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$.

问题 4:在你以前学习的函数大家庭中,有函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的“亲戚”吗?

问题 5:在 $y=\sin x$ 图象的基础上,如何研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象?

在面对多个变量时,要引导学生可采用控制变量法将复杂问题简单化,接着分小组合作讨论,共同制定研究方案,课堂上为了统一意见,将采取由内而外的顺序,即先探究参数 φ、ω 再探究参数 A 对函数图象的影响.

设计意图 过程性教学的一个基本原则是灵活运用已有知识,故引导学生建立起函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 与函数 $y=\sin x$ 的联系,在实现从未知到已知转变的同时让学生在学习过程中体会感悟问题研究的一般方法.

3.3 操作探究,分析模型

探究 1 探究参数 φ 对函数图象的影响

问题 6:函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系?

函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 不是一个具体的函数,是不能直接画出其函数图象的,故引导学生从具体函数出发,用三种方法帮助学生理解参数 φ 对函数图象的影响.

1)“五点作图法”画具体函数图象

引导学生选取三个不同的 $\varphi(\varphi_1>0$、$\varphi_2=0$、$\varphi_3<0)$ 值进行探究,用“五点作图法”画出函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$、$y=\sin x$、$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,从具体函数的研究中发现规律,从而推广到一般情况,初步得出函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象可由函数 $y=\sin x$ 图象上所有的点向左$(\varphi>0)$或向右$(\varphi<0)$平移 $|\varphi|$ 个单位得到.

2) 几何画板动态演示

验证所得结论是否正确,直观感受点之间的变化.

3) 图象变换的本质即点的变换

设点 $P(x,y)$ 为函数 $y=\sin x$ 图象上任意一点,将点 $P(x,y)$ 沿 x 轴向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位,则得点 $Q(x-\varphi,y)$,而点 $Q(x-\varphi,y)$ 的坐标满足函数 $y=\sin(x+\varphi)$,故点 Q 在函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象上,反之同理.

探究 2 参数 ω 对函数图象的影响$(\omega>0)$

问题 7:函数 $y=\sin\omega x$ 与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系?

学生思维容易受到前面影响,继续考虑由 $y=\sin x$ 经过平移得到函数 $y=\sin\omega x$,为了突破难点,让学生继续从具体函数入手,经历动手操作、探究、证明的过程.

1)“五点作图法”画具体函数图象

选取三个不同的 $\omega(\omega>1,\omega=1,\omega<1)$ 值进行探究,如用“五点作图法”画出函数 $y=\sin 2x$, $y=\sin x$, $y=\sin\frac{x}{2}$ 的图象.通过观察图象,发现函数图象变换并非通过某种平移得来,而是横坐标之间存在一个倍数关系.

2) 几何画板演示

用几何画板动态演示图象变换过程,验证结论.

3) 图象变换的本质即点的变换

设点 $P(x,y)$ 为 $y=\sin x$ 图象上的任意一点，将点 $P(x,y)$ 的横坐标变为 $\dfrac{x}{\omega}$，得到点 $Q\left(\dfrac{x}{\omega},y\right)$，而点 $Q\left(\dfrac{x}{\omega},y\right)$ 满足函数 $y=\sin\omega x$，故点 Q 在函数 $y=\sin\omega x$ 的图象上.

探究 3　探究参数 A 对函数图象的影响（$A>0$）

问题 8：函数 $y=A\sin x$ 与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系？

探究参数 A 对函数图象的影响相比 φ、ω 容易些，故让学生依照上述探究参数 φ、ω 的方法，从具体函数出发探究总结规律，最后教师完善结论.

设计意图　创设经历性、体验性和探究性的数学活动，用三种不同方法加以解释验证，让学生在活动中经历、体验、探究数学知识的发生发展过程，领悟其中的规律，深化学生的理性思考.

探究 4　探究参数简单复合对函数图象的影响

研究完三个参数对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响后，需将三个参数进行整合，即探究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

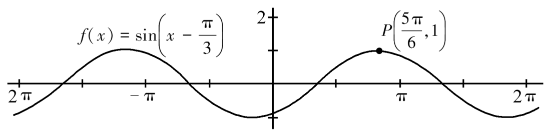
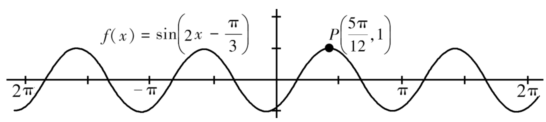
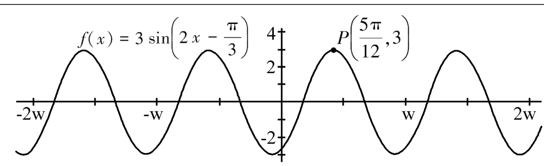
下列函数图象是如何由函数 $y=\sin x$ 的图象变换得到的？

①$y=3\sin 2x$；②$y=3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$；

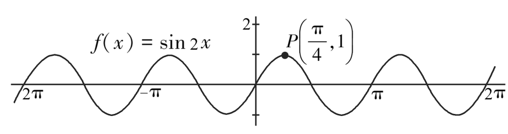
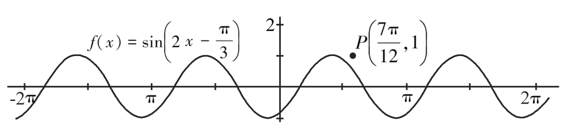
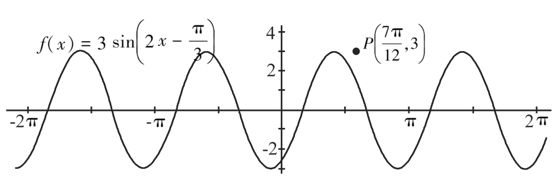
③$y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

第①、②小题可以帮助学生理解图象变换需分步骤，思考后口述说出答案，第③小题动手写出变换过程，由于图象变换方法不唯一，容易出错，故在学生中各找一个正确和错误的具有代表性的变换过程，让学生上黑板板演，展示其解法.

学生 1 的解题过程

变换过程	图　形
$y=\sin x\xrightarrow[\sin x\text{ 上任一点 }P\left(\frac{\pi}{2},1\right)]{\text{向右平移}\frac{\pi}{3}\text{个单位}}y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$	
$\xrightarrow{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{2}\text{个单位}}y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$	
$\xrightarrow{\text{纵坐标变为原来的 3 倍}}y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$	

学生 2 的解题过程

变换过程	图　形
$y=\sin x\xrightarrow[\sin x\text{ 上任一点 }P\left(\frac{\pi}{2},1\right)]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{2}}y=\sin 2x$	
$\xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{3}\text{个单位}}y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$	
$\xrightarrow{\text{纵坐标变为原来的 3 倍}}y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$	

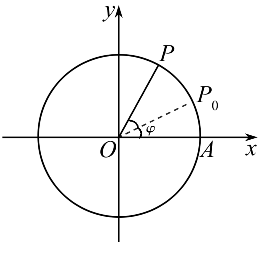


图 2

画出变换后函数的图象能验证两种解法是否正确,根据解法1中图象上点P仍在变换后所得函数图象上,而解法2中点P不在变换后所得函数图象上,故解法2不正确,但学生较难理解其错误原因,故用摩天轮问题进行解释:如图2,函数$y=\sin 2x$表示初始位置在点A处时点P的纵坐标y与时间x的函数关系,函数$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$表示从点$A$转动到点$P_0$的纵坐标$y$与时间$x$的函数关系,点$P$从点$A$转动到点$P_0$,转过的角为$\frac{\pi}{3}$rad,角速度是2rad/min,故转动的时间为$\frac{\pi}{6}$min,因此平移量为$\frac{\pi}{6}$,而不是$\frac{\pi}{3}$[3].

设计意图　通过具体函数变换充分暴露学生的思维过程,并从错误中发现问题,分析问题,进而解决问题,进一步加深对函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$变换过程的理解.

3.4　巩固练习,理解知识

例:画出函数$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$的简图,并借助摩天轮模型解释其实际意义.

设计意图　通过画函数图象来巩固对本节知识的理解,了解模型的实际意义.

3.5　归纳总结,反思提升

由学生自己回顾本节课的探究过程,总结函数图象变换的方法.

图象变换过程	
方法1:先平移后伸缩	$y=\sin x\xrightarrow{\text{向左(右)平移}\,|\phi|\,\text{个单位}}y=\sin(x+\varphi)$ $\xrightarrow{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}y=\sin(\omega x+\varphi)$ $\xrightarrow{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}}y=A\sin(\omega x+\varphi)$
方法2:先伸缩后平移	$y=\sin x\xrightarrow{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}y=\sin\omega x$ $\xrightarrow{\text{向左(右)平移}\frac{|\varphi|}{\omega}\text{个单位}}y=\sin(\omega x+\phi)$ $\xrightarrow{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}}y=A\sin(\omega x+\varphi)$
蕴含的思想方法:数形结合思想、化归思想	

设计意图　过程性教学不仅要关注知识目标,还要关注过程性目标,帮助学生养成良好的学习习惯,善于反思,使本节课的总结成为学生凝练提高的平台.

3.6　作业布置,拓展深化

(1)函数$y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象是由$y=\sin x$的图象怎样变换得到的?

(2)你能试着探究函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中$A<0$、$\omega<0$)的图象吗?如$y=-2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

设计意图　作业的布置应成为过程性教学学生新学习的开端,问题的设置在让学生继续保持浓厚学习兴趣的同时还能检测学生过程性目标的达成情况.

参考文献

[1]　阿尔弗雷德·诺思·怀特海著.过程与实在[M].杨富斌译.北京:中国城市出版社,2003:40.

[2]　阿尔弗雷德·诺思·怀特海著.教育的目的[M].徐汝舟译.北京:三联书店,2002:69-72.

[3]　章建跃,李柏青,金克勤,董凯.体现函数建模思想 加强信息技术应用——"函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$"的修订研究报告[J].数学通报,2015,54(08):1-8.

作者简介　董丽平(1998—),女,江西师范大学数学与统计学院学科教学数学专业在读研究生.

刘锡光,男,江西师范大学《中学数学研究》杂志主编.