圆锥曲线双切线交点轨迹探究

——姊妹椭圆和双曲线衍生新椭圆两定理的发现与证明

河南许昌市长葛市新华书店 461500 丁位卿

江西省上饶市鄱阳县油墩街中学 333119 万志红

【摘 要】 圆锥曲线以其美妙的身姿及其它蕴藏的难以穷尽的优美性质引起着众多数学家与数学爱好者对它的研究兴趣,对它的研究没有彼岸.本文给出笔者对圆锥曲线上的两动点(对应的变半径夹角为不超过平角的定角)的双切线轨迹进行深入地探究,新发现3个新命题及其推论(也是3个新定理),供读者参考.

【关键词】 圆锥曲线;双切线交点;姊妹(衍生)椭圆

1 椭圆的双切线交点轨迹

命题1 如图1,已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点$A,B$,令$\angle AOB=\theta$(定角),且$0°<\theta<180°$,以$A,B$为切点分别作椭圆的切线,交点为$P$,则点$P$的轨迹方程为:$[a^4(b^2-y^2)+b^4(a^2-x^2)]^2=4a^4b^4[a^2y^2+b^2(x^2-a^2)]\cdot\cot^2\theta$.

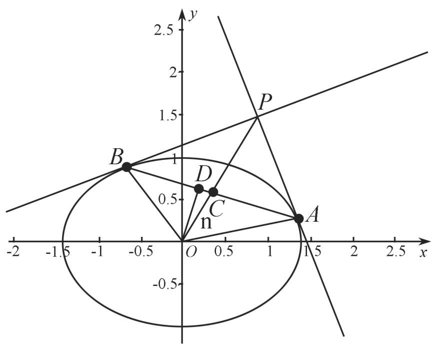

图1

证明 我们知道过椭圆上一点(x_0,y_0)处的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$,即$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(s,t)$,则过$A,B$两点的切线方程分别为$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$和$b^2x_2x+a^2y_2y=a^2b^2$,且有$\begin{cases}b^2x_1s+a^2y_1t=a^2b^2,\\ b^2x_2s+a^2y_2t=a^2b^2.\end{cases}$所以切点弦$AB$的方程为$b^2sx+a^2ty=a^2b^2$①.

与椭圆方程$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$②联立先消去y,化简整理得$(a^2t^2+b^2s^2)x^2-2a^2b^2sx+a^4(b^2-t^2)=0$,所以$x_1+x_2=\frac{2a^2b^2s}{a^2t^2+b^2s^2}$③,$x_1x_2=\frac{a^4(b^2-t^2)}{a^2t^2+b^2s^2}$④.

同理,联立①,②两式,再消去x化简整理得$y_1+y_2=\frac{2a^2b^2t}{a^2t^2+b^2s^2}$⑤,$y_1y_2=\frac{b^4(a^2-s^2)}{a^2t^2+b^2s^2}$⑥.

由已知$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$,$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$,故$|\overrightarrow{OA}|=|OA|$,$|\overrightarrow{OB}|=|OB|$.

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\theta$⑦.

又如图1,过O作$OD\perp AB$,垂足为D点,并设$d=OD$.

已知切点弦AB方程为$b^2xs+a^2yt=a^2b^2$,所以$k=k_{AB}=-\frac{b^2s}{a^2t}$.

由点到直线距离公式得$d=OD=\frac{\left|-\frac{b^2}{t}\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{b^2}{|t|\sqrt{1+k^2}}\Rightarrow d^2=\frac{b^4}{t^2(1+k^2)}$.

又$AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+k^2)(x_1-x_2)^2$,$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4a^4b^4s^2}{(a^2t^2+b^2s^2)^2}-\frac{4a^4(b^2-t^2)}{a^2t^2+b^2s^2}=\frac{4a^4t^2(a^2t^2+b^2s^2-a^2b^2)}{(a^2t^2+b^2s^2)^2}$,所以$AB^2=\frac{4a^4t^2(a^2t^2+b^2s^2-a^2b^2)\cdot(1+k^2)}{(a^2t^2+b^2s^2)^2}$.

所以$d^2\cdot AB^2=\frac{4a^4b^4[(a^2(t^2-b^2)+b^2s^2]}{(a^2t^2+b^2s^2)^2}$⑧.

因为$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\theta=\frac{1}{2}|AB|\cdot|OD|=\frac{1}{2}|AB|d$,所以$|AB|\cdot d=$

$|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\theta$. ⑨

联立 ⑦,⑨ 两式消去 $|OA|\cdot|OB|$(两边同时平方)得 $(x_1x_2+y_1y_2)^2=d^2\cdot AB^2\cdot\cot^2\theta$. ⑩

因为 $x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{a^4(b^2-t^2)}{a^2t^2+b^2s^2}+\dfrac{b^4(a^2-s^2)}{a^2t^2+b^2s^2}$.

将上式和 ⑧ 式同时代入 ⑩ 式化简整理得

$[a^4(b^2-y^2)+b^4(a^2-x^2)]^2=4a^4b^4[a^2y^2+b^2(x^2-a^2)]\cdot\cot^2\theta$(＊)

它就是交点 P 的轨迹方程.

由(＊)式,当 $\angle AOB=\theta=90°$,$\cot\theta=0$.故由(＊)式推导出 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}=1(a>b>0)$(＊＊)

此轨迹是新椭圆,它与蒙日圆有四个交点,分别是 (a,b),$(-a,b)$,$(-a,-b)$,$(a,-b)$,所以当 $\theta=\angle AOB=90°$ 时,它是一个与原椭圆同中心的姊妹椭圆,于是有以下推论:

姊妹椭圆定理(推论)　从椭圆(椭圆心角为直角)上不同两点引它的两条切线的交点的轨迹,就是与原椭圆同中心的姊妹椭圆(如图 2).

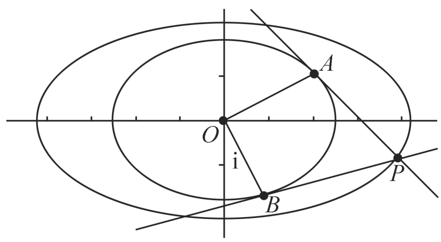

图 2

因此,我们可以编制一道模拟高考题(取 $a=\sqrt{2}$,$b=1$).

题　从椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上两不同点 A,B 引两条切线 PA,PB,其交点为 P,满足 $\angle AOB=90°$,求动点 P 的轨迹方程.

由(＊＊)式可知,点 P 轨迹是椭圆:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{6})^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=1.$$

对姊妹椭圆的结论式简证之,因为 $\theta=\angle AOB=90°$,由 ⑦ 式得 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

将 ④,⑥ 式同时代入上式即得证(＊＊)式.

另,在图 1 中,连结 OP,交 AB 于点 C,设 AB 的中点为 C',则 $x_{C'}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$,$y_{C'}=\dfrac{y_1+y_2}{2}$,所以 $k_{OC'}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{t}{s}=k_{OP}$.

这样 C' 既在 AB 上又在 OP 上,故 C 与 C' 重合,所以 O,C,P 三点共线.

于是我们就发现椭圆一个有趣性质:从椭圆外一点引两条切线,该点与切点弦的中点、椭圆中心(原点)三点共线(它与 $\angle AOB$ 大小无关).

2　双曲线的双切线交点轨迹

命题 2　双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的同一支上有两个不同的点 A,B,令 $\angle AOB=\theta$(定角),且 $0°<\theta<180°$,以 A,B 为切点作双曲线的两条切线 PA,PB,则交点 P 的轨迹方程为:$[a^4(y^2+b^2)+b^4(x^2-a^2)]^2=4a^4b^4[a^2y^2-b^2(x^2-a^2)]\cdot\cot^2\theta$.

此轨迹方程形式比较优美和谐,若令左边 $a^4(y^2+b^2)+b^4(x^2-a^2)=0$,得到如下它的一个推论.

双曲线衍生新椭圆定理(推论)　双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$ 上不同两点 A,B,PA,PB 为它的两条相交于点 P 的切线,切点分别是 A,B.若 $\angle AOB=90°$,交点 P 的轨迹是一个以双曲线的中心为中心的新椭圆,其焦点在 y 轴上(见图 3),方程为:

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{b}{a}\sqrt{b^2-a^2}\right)^2}=1(b>a>0).$$

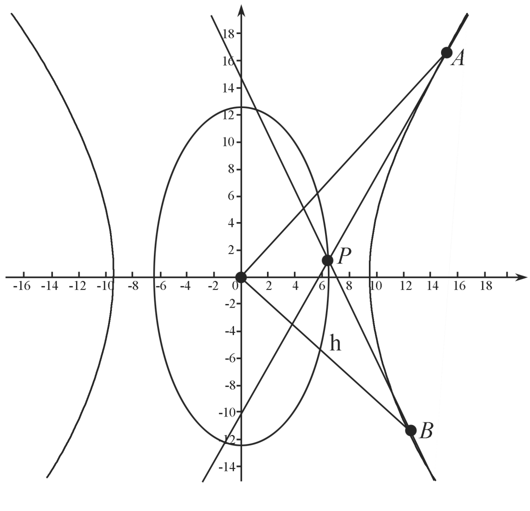

图 3

说明：当 $a=b$ 时 P 的轨迹就是坐标原点；当 $a>b$ 时，P 的轨迹不存在；

另有一个与前面椭圆类似的一个性质：原命题2除不限定 $\angle AOB$ 外其它条件不变，O,C,P 三点共线.

对于命题 2 及其推论与性质的证明与命题 1 的证明步骤和技巧完全类似，证明过程略.

3　抛物线的双切线交点轨迹

命题3　如图4，对抛物线 $y^2=2px(p>0)$，设抛物线上不同的两切点 A,B，且满足 $\theta=\angle AOB$ 为定角（限定它不超过180°），分别以 A,B 为切点的切线交于点 P，则两切线交点 P 的轨迹方程分以下两种情况：

（1）当 $\angle AOB=90°$ 时，P 点轨迹就是直线 $x=-2p$；

（2）当 $\angle AOB\neq 90°$ 时，P 点轨迹是双曲线的单支. 曲线方程为：$\dfrac{[x+2p(1+2\cot^2\theta)]^2}{\left(\pm\dfrac{4p\cot\theta}{\sin\theta}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{2p}{\sin\theta}\right)^2}=1$，其中心坐标为 $(-2p(1+2\cot^2\theta),0)$，$a=\pm\dfrac{4p\cot\theta}{\sin\theta}=\pm 4p\cot\theta\cdot\csc\theta$，$b=\dfrac{2p}{\sin\theta}=2p\cdot\csc\theta$.

（注：当 $0°<\theta<90°$ 时，取正号；当 $90°<\theta<180°$ 时，取负号）

证明　如图 4，对抛物线 $y^2=2px(p>0)$，记 $\alpha=\angle AOx$，$\beta=\angle BOx$，则 $\beta-\alpha=\theta$.

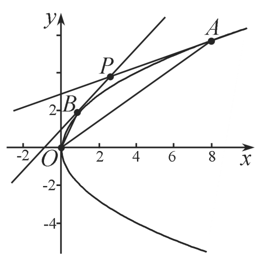

图 4

将 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$ 代入抛物线 $y^2=2px$，得极坐标方程为 $\rho=\dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$，所以 $x=\rho\cos\varphi=2p\cot^2\varphi$，$y=2p\cot\varphi$.

又设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(m,n)$，所以 $y_1+y_2=2p\cdot(\cot\alpha+\cot\beta)$，$y_1y_2=4p^2\cdot\cot\alpha\cot\beta$.

我们知道，过抛物线上点 (x_0,y_0) 的切线方程为 $y_0y=p(x+x_0)$，故切线 PA 的直线方程为 $y_1y=p(x+x_1)$，切线 PB 的直线方程为 $y_2y=p(x+x_2)$.

两切线交于 P 点，所以 $y_1n=p(m+x_1)$，$y_2n=p(m+x_2)$，所以切点弦 AB 的直线方程为 $yn=p(m+x)$，即 $px=ny-pm$，再代入 $y^2=2px$ 得 $y^2=2px=2ny-2pm$，即 $y^2-2ny+2pm=0$，所以 $y_1+y_2=2n$，$y_1y_2=2pm$. 又因为 $y_1+y_2=2p\cdot(\cot\alpha+\cot\beta)$，所以 $2p\cdot(\cot\alpha+\cot\beta)=2n$，即 $\cot\alpha+\cot\beta=\dfrac{n}{p}$①，又 $y_1y_2=4p^2\cdot\cot\alpha\cot\beta$，所以 $4p^2\cdot\cot\alpha\cot\beta=2pm$，即 $\cot\alpha\cot\beta=\dfrac{m}{2p}$.②

因为 $\theta=\beta-\alpha(\beta>\alpha)$，所以 $\cot\theta=\dfrac{1+\cot\alpha\cdot\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}$，$\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{1+\cot\alpha\cdot\cot\beta}{\cot\theta}$③.

当 $\theta=90°$ 时，$\cot\theta=0$，即 $1+\cot\alpha\cdot\cot\beta=0$，$1+\dfrac{m}{2p}=0$，得 $m=-2p$，即 $x=-2p$. 所以两切线交点 P 轨迹就是直线 $x=-2p$.

当 $0°<\theta<180°$ 且 $\theta\neq 90°$ 时，②式代入③得 $\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{1+\cot\alpha\cdot\cot\beta}{\cot\theta}=\dfrac{2p+m}{2p\cdot\cot\theta}$④.

将④，②，①三式同时代入恒等式 $(\cot\alpha-\cot\beta)^2+4\cot\alpha\cdot\cot\beta=(\cot\alpha+\cot\beta)^2$.

化简并整理得

$$\frac{[x+2p(1+2\cot^2\theta)]^2}{\left(\pm\dfrac{4p\cot\theta}{\sin\theta}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{2p}{\sin\theta}\right)^2}=1.$$

（补充说明：抛物线上不同的两切点 A,B 运动时，并始终保持其定角（差角）$\theta=\beta-\alpha$ 为正角，凡是在 x 轴下方抛物线上的点对应的角均用负角表示.）

命题 3 证毕.

前面两个命题及推论是丁位卿发现并完成证明的，最后一个抛物线定理是由万志红老师提出并证明.

作者简介　丁位卿（1964—），男，河南长葛人，数学爱好者；在省级期刊上发表论文 10 余篇.

万志红，男（1985—），江西上饶人，中学一级教师；致力于高中数学教育教学及高考数学试题研究，擅长信息技术融于数学的解题研究.