向“通性通法”求“长期利益”

——以 2021 年浙江高考 21 题为例

杭州绿城育华学校　310000　张旭强

【摘　要】 笔者认为重“通性通法”的数学教学能够追求数学教育的“长期利益”,本文以 2021 年浙江高考解析几何 21 题为例,从“通性通法”的角度对此题进行解法分析,及分析此题对高中数学后续复习备考的启示.

【关键词】 高中数学;通性通法;解析几何;浙江高考

高考通过解题来反馈学生的数学能力,高考分数是数学学习的眼前利益,与之相对的是“长期利益”,何为数学学习的“长期利益”呢? 结合课标[1]数学核心素养的要求,笔者认为教师通过数学教学帮助学生形成理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程应是数学教学所要追求的“长期利益”.

章建跃博士在《注重通性通法才是好数学教学》一文中所述,解题教学中,注重“通性通法”是追求“长期利益”的有效途径.“通性”就是概念所反映的数学基本性质;“通法”就是概念所蕴含的思想方法.解题教学中,注重基础知识及其蕴含的数学思想方法,才是追求数学教学的“长期利益”[2].

2021 年高考落下帷幕,数学题难易的评价持续占据各大网络论坛.今年浙江数学试卷评论最多的是“后两题很难”,其中一为 21 题解析几何大题.解析几何作为高中数学重要知识,蕴涵着数学主要的思想和方法,所以解决解析几何问题中涉及的通法也是多样的.

试题呈现

如图 1,已知 F 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点,M 是抛物线的准线与 x 轴的交点,且 $|MF|=2$.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 设过点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点,若斜率为 2 的直线 l 与直线 MA,MB,AB,x 轴,依次交于点 P,Q,R,N,且满足 $|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$,求直线 l 在 x 轴上截距的取值范围.

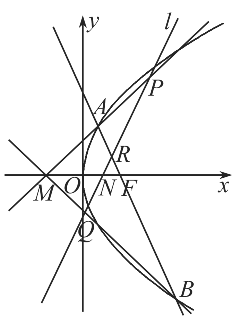


图 1

此题满分 15 分,全省平均分 6 分左右,第一问求抛物线方程 $y^2=4x$ 比较简单,4 分,可见第二问均分较低.

中学解析几何将几何图形置于直角坐标系中,用代数方法研究几何图形,计算量大且繁琐,这会影响学生的解题.实际教学中,教师要有突出重点的“通性通法”实践,作为解析几何的重点就是如何理解曲线的方程和方程的曲线,突出曲线的方程是由曲线的性质得到,方程的曲线是由方程的代数结构特征体现的几何特征[3].本文就今年浙江高考的第二问从通性、通法的角度来谈谈如何解题,及后续备考的启示.

分析 1　直线 l 与直线 MA,MB,AB,x 轴,依次交于点 P,Q,R,N,且满足 $|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$,此式中的等量关系是建立在线段长度的概念上.此“通性”为,对于平面直角坐标系中线段的长度,先联立直线方程得到交点坐标,然后用两点间距离公式(弦长公式),此做法涉及的“通法”有:坐标法,消元法,韦达定理法等.

解法 1　设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,$l:x=\frac{1}{2}y+t$,$l_{AB}:x=my+1$,联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$ 得到 $y^2-4my-4=0$,则 $y_1+y_2=4m,y_1\cdot y_2=-4$.

因为 $|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$,所以根据弦长公式得 $\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_R|\right)^2=\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_p|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_Q|$,即 $y_R^2=|y_Q\cdot y_p|$.

因为 $l_{MA}:y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，所以联立 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}y+t,\\ y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1),\end{cases}$ 得 $y_p=\dfrac{2(t+1)y_1}{2x_1+2-y_1}$，

同理 $l_{MB}:y=\dfrac{y_2}{x_2+1}(x+1)$，得 $y_Q=\dfrac{2(t+1)y_2}{2x_2+2-y_2}$.

联立 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}y+t,\\ x=my+1,\end{cases}$ 得 $y_R=\dfrac{t-1}{m-\dfrac{1}{2}}$.

根据题意 $\left|\dfrac{t-1}{m-\dfrac{1}{2}}\right|^2=\left|\dfrac{2(t+1)y_2}{2x_2+2-y_2}\cdot\dfrac{2(t+1)y_1}{2x_1+2-y_1}\right|$，得 $\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)^2=(2m-1)^2\left|\dfrac{y_1y_2}{(2x_2+2-y_2)(2x_1+2-y_1)}\right|=\left|\dfrac{4(2m-1)^2}{\left(\dfrac{y_2^2}{2}+2-y_2\right)\left(\dfrac{y_1^2}{2}+2-y_1\right)}\right|=$

$$\frac{4(2m-1)^2}{\left|\frac{y_1^2y_2^2}{4}+(y_1+y_2)^2-y_1y_2-\frac{y_1+y_2}{2}y_1\cdot y_2-2(y_1+y_2)+4\right|}$$

$=\dfrac{(2m-1)^2}{3+4m^2}$，设 $u=2m-1$，则 $\dfrac{3+4m^2}{(2m-1)^2}=\dfrac{u^2+2u+4}{u^2}=\left(\dfrac{2}{u}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geqslant\dfrac{3}{4}$.

因为 $\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)^2\geqslant\dfrac{3}{4}$，$t\neq1$，得 $t\in(-\infty,-7-4\sqrt{3}]\cup[7-4\sqrt{3},1)\cup(1,+\infty)$.

所以直线 l 在 x 轴上截距的取值范围为 $(-\infty,-7-4\sqrt{3}]\cup[7-4\sqrt{3},1)\cup(1,+\infty)$.

此做法是一种常规的思考，设点设线解决. 主要步骤为方程联立，韦达定理，运用弦长（或焦半径）公式，面积公式（或进行面积割补），利用已知条件几何关系（如对称，两直线平行垂直等）转化翻译为代数式运算.

分析 2　因为 $|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$，所以 $\dfrac{|RN|}{|PN|}=\dfrac{|QN|}{|RN|}$，可将线段之比转化为坐标之比，设点 $P(x_p,y_p)$，$R(x_R,y_R)$，$Q(x_Q,y_Q)$，则所满足的等式即转化为 $y_R^2=|y_Q\cdot y_p|$，省略了弦长的计算过程，这也是解析几何计算中经常采用的一种优化计算的方法. 此做法涉及的“通法”如“分析 1”，思维进一步，计算相对便捷.

解法 2　设点 $P(x_p,y_p)$，$R(x_R,y_R)$，$Q(x_Q,y_Q)$，因为 $|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$，所以 $\dfrac{|RN|}{|PN|}=\dfrac{|QN|}{|RN|}$，即 $y_R^2=|y_Q\cdot y_p|$，后如解法 1.

此解法要求学生在解圆锥曲线问题的过程中，对题中的几何语言进行合理解析，并简化运算. 比如，此题中将线段之比转化为横（纵）坐标之比，把几何面积问题转化为坐标运算，将点与圆位置关系转化为向量数量积计算等. 而这些看似巧妙的转化，实则是落实了“通性通法”后的一种“优术”，方法选取要“优术”，整合认知的结构，反思择优[4].

分析 3　圆锥曲线的焦点弦有很多性质. 这里 M 为准线与 x 轴的交点，注意到 $\angle AMF=\angle BMF$，且直线 AM 斜率必存在，此“通性”为抛物线的定义，抛物线上一点到焦点的距离等于到准线的距离，作 $CA\perp CM$ 于点 C，作 $BD\perp DM$ 于点 D，证明 $\triangle ACM\backsim\triangle BDM$，如图 2，此做法涉及的“通法”有：坐标法，消元法等.

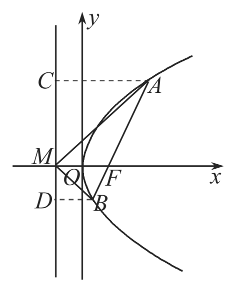


图 2

解法 3　设直线 $AM:x=ny-1$，根据 $\angle AMF=\angle BMF$，得直线 $BM:x=-ny-1$，$l:x=\dfrac{1}{2}y+t$，$l_{AB}:x=my+1$.

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ x=ny-1,\end{cases}$ 得 $x_A=\dfrac{n+m}{n-m}$，$y_A=\dfrac{2}{n-m}$，将点 A 坐标代入抛物线方程 $y^2=4x$，可得 $n^2-m^2=1$. (*)

联立 $\begin{cases}x=ny-1,\\ x=\dfrac{1}{2}y+t,\end{cases}$ 得 $y_p=\dfrac{2t+2}{2n-1}$，同理 $y_Q=\dfrac{2t+2}{-2n-1}$，联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ x=\dfrac{1}{2}y+t,\end{cases}$ 得 $y_R=\dfrac{2t-2}{2m-1}$，

因为 $|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$，所以 $\dfrac{|RN|}{|PN|}=\dfrac{|QN|}{|RN|}$，

即 $y_R^2=|y_Q\cdot y_p|$，得 $\left(\frac{2t-2}{2m-1}\right)^2=\frac{(2t+2)^2}{4n^2-1}$，代入（*）式：$\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2=\frac{(2m-1)^2}{4m^2+3}$，后如解法 1.

此解法的优势在于抓住了抛物线焦点弦的一个基本性质，当然这样的性质在椭圆如图 3(1) 与双曲线如图 3(2) 中都存在，点 F_1 与点 M 为各自曲线同侧的一组焦点与准线和坐标轴的交点，过此焦点 F_1 做一条焦点弦交各自曲线（一支）于 AB 两点，则两图中都有 $\angle AMF_1=\angle BMF_1$，证明略.

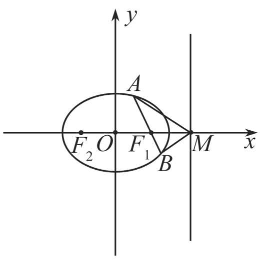


图 3(1)

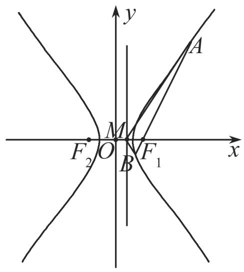


图 3(2)

分析 4　有了上述的思考，若结合“通性”概念，如图 4，不难发现过点 A 作 $AE\perp ME$ 于点 E，由于 $AC=AF$，则有 $\tan\angle AMF=\frac{MC}{AC}=\frac{AE}{AF}=\sin\angle AFE$，此辅助线的作法也是解决抛物线问题的一种“通法”.

解法 4　由抛物线性质 $\angle AMF=\angle BMF$，且直线 AM 斜率必存在，令 $\angle AMF=\angle BMF=\alpha$，直线 AB 的倾斜角为 β，则 $l_{AM}:y=\tan\alpha(x+1)$，$l_{BM}:y=-\tan\alpha(x+1)$，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$l:x=\frac{1}{2}y+t$，$l_{AB}:x=\frac{1}{\tan\beta}y+1$，

联立 $\begin{cases}y=\tan\alpha(x+1),\\x=\frac{1}{2}y+t,\end{cases}$

得 $y_p=\frac{2t\cdot\tan\alpha+2\tan\alpha}{2-\tan\alpha}$，

同理 $y_Q=\frac{2t\cdot\tan\alpha+2\tan\alpha}{-2-\tan\alpha}$，

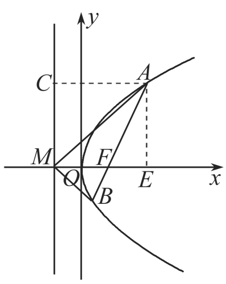


图 4

联立 $\begin{cases}x=\frac{1}{\tan\beta}y+1,\\x=\frac{1}{2}y+t,\end{cases}$ 得 $y_R=\frac{t-1}{\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{2}}$.

根据抛物线的几何性质可得 $\tan\alpha=\sin\beta$，简证如下 $\tan\alpha=\frac{y_A}{|x_A+1|}=\frac{y_A}{|AF|}=\sin\beta$，因为 $y_R^2=|y_Q\cdot y_P|=-y_Q\cdot y_P$，所以 $\left(\frac{t-1}{\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{2t\cdot\tan\alpha+2\tan\alpha}{2-\tan\alpha}\cdot\frac{2t\cdot\tan\alpha+2\tan\alpha}{2+\tan\alpha}$.

化简得 $\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2=\frac{(2-\tan\beta)^2}{\tan^2\beta}\cdot\frac{\tan^2\alpha}{4-\tan^2\alpha}$，代入 $\tan\alpha=\sin\beta$，得 $\frac{(2-\tan\beta)^2}{\tan^2\beta}\cdot\frac{\tan^2\alpha}{4-\tan^2\alpha}=\frac{(2-\tan\beta)^2}{\tan^2\beta}\cdot\frac{\sin^2\beta}{4-\sin^2\beta}=\frac{\left(2-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)^2}{\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)^2}\cdot\frac{\sin^2\beta}{4-\sin^2\beta}=\frac{(2\cos\beta-\sin\beta)^2}{3\sin^2\beta+4\cos^2\beta}=\frac{\tan^2\beta-4\tan\beta+4}{3\tan^2\beta+4}$，得 $\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2\geqslant\frac{3}{4}$，$t\neq1$，所以 $t\in(-\infty,-7-4\sqrt{3}]\cup[7-4\sqrt{3},1)\cup(1,+\infty)$.

此解法利用了抛物线概念，对学生的三角函数计算要求较高，优势为省略了直线与抛物线的联立，少了参数.

回到今年高考考生的得分，考生若能对题中几何语言很好地解析化，在平时的课堂教学中落实上述分析中的“通性通法”“眼前利益”分数也不会低，最后最值的运算确实繁琐，在改卷中，最值计算及答案为 4 分，若扣除此分数，得到 11 分也比均分高了5 分.

解法 3，4 中“$\angle AMF=\angle BMF$”和“$\tan\alpha=\sin\beta$”，看似巧妙，实则是建立在解析几何数形互通的这个“通性”上的.

若将此题中抛物线的通性进行推广可以得到以下性质，证明略.

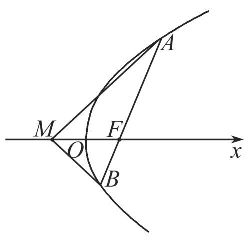


图 5(1)

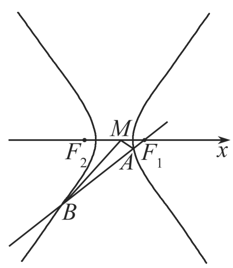


图 5(2)

性质 1　如图 5(1)，设焦点在 x 轴的某一圆锥曲线，对于任意一条经过该焦点 F 的弦 AB，在 x 轴上

总存在某一点 M,使得 $\angle AMF = \angle BMF$.

当此曲线为双曲线时,过焦点 F 的弦 AB 需要讨论是否交于同一支曲线.于是有性质 2、性质 3.

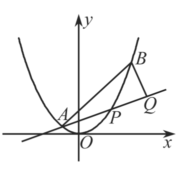
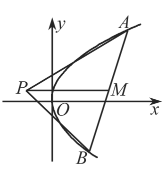
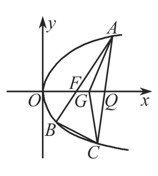
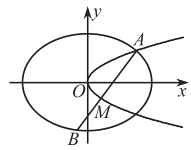
性质 2 设焦点在 x 轴上的双曲线,对于任意一条经过该焦点 F 的弦 AB,如果 A,B 两点在双曲线的一支上,在 x 轴上总存在某一点 M,使得 $\angle AMF = \angle BMF$.

性质 3 如图 5(2),设焦点在 x 轴上的双曲线,F_1 为其一个焦点,对于任意一条经过该焦点 F_1 的弦 AB,如果 A,B 两点在双曲线的两支上,在 x 轴上总存在某一点 M,使得 $\angle AMF_1 + \angle BMF_1 = 180°$.

解题教学中,注重基础知识及其蕴含的数学思想方法,才是追求数学教学的"长期利益".这样的"长期利益"是有生长性的.在教学中,一些所谓的"巧解,妙解"正是基于基本"通性通法"的各种特殊化演绎得来.此题中,笔者结合抛物线的概念知识"通性",以及研究抛物线经常采用的"通法",得到一些新的结论或者性质,这样的数学教学有利于激发学生学习数学的兴趣,养成良好的学习习惯,促进学生实践能力和创新意识的发展,而这样的"长期利益"也符合新课程标准提出的高中数学课程为学生的可持续发展和终身学习创造条件的要求.

此轮"7 选 3"高考改革以来,浙江试卷解析几何大题的考查知识点和问题解决的"通法",见下表.

表 近四年浙江高考解析几何大题考查知识点及通法汇总表

年份	图形	知识点	通　法
2017 年		弦长,向量数量积	弦长,向量数量积运算,导数求最值
2018 年		弦中点,面积	韦达定理,面积公式
2019 年		三角形重心,面积比	韦达定理,弦长,点到直线距离,面积公式
2020 年		弦中点	韦达定理,点差法

平时在教学过程中,教师经常会有一种感悟:讲过的,练过的,考试却得不到分数.仔细分析原因在于这样的讲解和练习往往有"题型 + 技巧"的背景,脱离了"通性通法",学生没有掌握基本的数学思想方法,也没有养成思考和解决问题的习惯,这样的教学当然即无眼前利益更无长期利益.仔细想想,笔者和广大教师一样,真该反思并改进自己的教学行为,以"课程标准"为导向,落实数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验.

还记得 2021 年 1 月"八省联考"解析几何大题,考查双曲线,网上一片哗然,"不按套路出牌".仔细品味此解析几何大题,以双曲线为背景,考查解析几何的基础知识、核心思想方法,通过建立函数模型,将几何问题转化代数运算,再将计算结果转化为几何特征.正是对圆锥曲线"通性通法"的考查.看似"不按套路出牌",实则是在按新高考的套路出牌.解析几何题,虽有众多思路与方法,但通性通法应是首选方法[5].

高考题是一载体,载体背后是基础知识及其蕴含的数学思想方法.高考要拿分,必须重视"通性通法".通过"通性通法"的教学,学生既收获"眼前利益",又习得素养落地,赢得"长期利益".

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2017.1:1.

[2] 章建跃.章建跃数学教育随想录[M].杭州:浙江教育出版社,2017.6:626.

[3] 金钟植.培养数学思维能力之通性通法研究[J].高中数理化,2018(24):19-21.

[4] 张旭强.取势、明道、优术:立意素养的高中数学习题讲解三层次[J].中学数学月刊,2020(03):60-62.

[5] 渠东剑.高考数学复习教学教什么——"八省联考"解析几何问题的分析与启示[J].中学数学教学参考,2021(04):46-50.

作者简介 张旭强(1983—),男,浙江杭州人,中学高级教师,长期在高中一线教学,撰写论文获得浙江省杭州市一等奖,独立完成两个杭州市市级小课题,杭州市高中数学新锐教师.研究方向:高中数学教学.