由一个结论深度探究同构思想在高考压轴题中的应用*

广东省广州市第八十六中学 510700 柯桂宏
广东省揭阳第一中学 522000 林彩凤

【摘 要】 在近几年高考题压轴题研究中发现,用同构思想解决问题是高考的一个热点.本文立足于课本,探索同构思想的来源,深度探究同构思想在高考函数题、解析几何题、经典几何结论证明中的巧妙应用,让学生理解和掌握同构思想运用的基本步骤和基本推理过程.本文先从具体例子过度到用同构法探究证明解析几何结论、一般的同构函数模型,从个别到一般,从复杂到简单,从而培养学生数学运算以及逻辑推理的素养.

【关键词】 同构思想;深度探究;高考压轴题;数学核心素养

1 同构思想原理溯源

数学中的同构式是指具有相同结构的两个式子,但是变量不同.同构式的思想来源于函数的一个基础的结论:设函数 $f(x)$ 在定义域 D 上是一个增函数,当 $f(x_1)>f(x_2)$,则有 $x_1>x_2$;当 $f(x_1)=f(x_2)$,则有 $x_1=x_2$;当 $f(x_1)<f(x_2)$,则有 $x_1<x_2$.同构思想的本质就是构建相同结构的函数,利用函数的单调性,把函数值 $f(x_1)$、$f(x_2)$ 之间的关系转化为两个变量 x_1、x_2 的关系,从而化繁为简,化难为易解决问题.利用同构思想需要掌握以下几个关键的步骤:

(1) 找出同构函数,经过移项,化简,变形等方法找出相同结构的函数;

(2) 研究同构函数的单调性,通过直接法或者求导研究同构函数的单调性;

(3) 利用函数的单调性,把函数值 $f(x_1)$、$f(x_2)$ 之间的关系转化为两个变量 x_1、x_2 的关系[1].

在高考中,函数题、解析几何题基本是压轴题,难度比较大,但对于近几年高考压轴题,使用同构思想可以巧妙简单地解决.下面以数学试题为例,从不同方面深度研究同构思想的作用.

2 同构思想的应用

2.1 同构思想在函数高考压轴题的应用

2.1.1 双变元的同构式[2]

例 1 (2020 全国高考二卷理科数学 11 题) 若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$,则( ).

A.$\ln(y-x+1)>0$ B.$\ln(y-x+1)<0$

C.$\ln|x-y|>0$ D.$\ln|x-y|<0$

分析 (1) 考察的对象是指数函数,将不等式移项变形为 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$,不等式左右两边是结构相同的式子,得到同构函数为 $f(t)=2^t-3^{-t}$;

(2) 由直接法得知函数 $f(t)$ 是在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

(3) 因为 $f(x)<f(y)$,由函数 $f(t)$ 单调性知 $x<y$.

因此去判断各个选项得知 A 是正确,B 是错误,C,D 是无法判断,故选 A.

例 2 (2020 全国高考一卷理科数学 12 题) 若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$,则( ).

A.$a>2b$ B.$a<2b$

C.$a>b^2$ D.$a<b^2$

分析 (1) 考察的对象是指数函数和对数函数,将等式右边变形为 $4^b+2\log_4 b=2^{2b}+\log_2 2b-1$,所以 $2^a+\log_2 a<2^{2b}+\log_2 2b$,不等式左右两边是结构相同的式子,得到同构函数为 $f(t)=2^t+\log_2 t$;(2) 由直接法得知函数 $f(t)$ 是在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;(3) 因为 $f(a)<f(2b)$,由函数 $f(t)$ 单调性知 $a<2b$.

因此去判断各个选项得知 B 是正确,所以选 B.

例 3 (2017 全国高考一卷理科数学 11 题) 设 x,y,z 为正数,且 $2^x=3^y=5^z$,则( ).

A.$2x<3y<5z$ B.$5z<2x<3y$

C.$3y<5z<2x$ D.$3y<2x<5z$

分析 (1) 本题要比较 $2x,3y,5z$ 的大小,设 $2^x=3^y=5^z=k(k>1)$,解得 $x=\log_2 k,y=\log_3 k$,$z=\log_5 k$,所以 $2x=\dfrac{2\ln k}{\ln 2}$,$3y=\dfrac{3\ln k}{\ln 3}$,$5z=\dfrac{5\ln k}{\ln 5}$,又因为

* 基金项目 广州市黄埔区教育科学规划课题“基于深度学习理论的高中数学单元主题教学设计研究”,课题编号:2020077.

$\ln k>0$,故比较$2x,3y,5z$的大小,即比较$\frac{2}{\ln2},\frac{3}{\ln3},\frac{5}{\ln5}$大小,而这三个式子结构相同,得到同构函数为$f(t)=\frac{t}{\ln t}$;

(2)求导得知$f(t)$在$(e,+\infty)$是增函数;

(3)利用函数的单调性知,因为$f(2)=f(4)$,所以$f(3)<f(4)<f(5)$,故$3y<2x<5z$,选D.

以上三道高考压轴题的条件中有函数不等式,有方程,有二元或三元等不同条件,但本质上都是比较函数自变量的大小.通过移项、放缩、变形等方法把复杂的式子变形成结构相同的式子,从而找出同构函数,利用函数的单调性解决问题.通过对不同层次的高考压轴题的研究发现,同构思想真是一把利器,不用蛮力也能巧妙轻松解决问题.

2.1.2　指对混合的同构式

例4　(2020山东高考21(2))已知函数$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.若$f(x)\geqslant1$,求$a$的取值范围.

分析　(1)由$f(x)\geqslant1$,可得$ae^{x-1}+\ln\frac{a}{x}\geqslant1$,移项得$ae^{x-1}\geqslant1-\ln\frac{a}{x}=\ln\frac{ex}{a}$,两边同时乘$ex$化简得$xe^x\geqslant\frac{ex}{a}\ln\frac{ex}{a}$.如果结构同左,用恒等式$x=e^{\ln x}$化不等式右边为$\frac{ex}{a}\ln\frac{ex}{a}=e^{\ln\frac{ex}{a}}\ln\frac{ex}{a}$,所以不等式可变形为$xe^x\geqslant\ln\frac{ex}{a}e^{\ln\frac{ex}{a}}$,不等式左右两边是相同结构的式子,得到同构函数为$F(t)=te^t$;

(2)求导知函数$F(t)=te^t$在$(0,+\infty)$是增函数;

(3)因为$F(x)\geqslant F\left(\ln\frac{ex}{a}\right)$,由函数$F(t)=te^t$的单调性知$x\geqslant\ln\frac{ex}{a}$,最后进行参变分离得出$\ln a\geqslant\ln x-x+1$,求出$a$的取值范围为$[1,+\infty)$.

例5　(2018全国高考一卷文科数学21(2))已知函数$f(x)=ae^x-\ln x-1$,证明:当$a\geqslant\frac{1}{e}$时,$f(x)\geqslant0$.

分析　(1)当$a\geqslant\frac{1}{e}$,先放缩得$f(x)\geqslant\frac{e^x}{e}-\ln x-1$,所以要证$f(x)\geqslant0$,即证$\frac{e^x}{e}-\ln x-1\geqslant0$,移项化简得$\frac{e^x}{e}\geqslant\ln ex$,两边同乘$ex$得$xe^x\geqslant ex\ln ex$,如果结构同左,即用$x=e^{\ln x}$化不等式右边为$ex\ln ex=e^{\ln ex}\ln ex$,所以不等式为$xe^x\geqslant e^{\ln ex}\ln ex$,得到同构函数为$F(t)=te^t$;

(2)求导知函数$F(t)=te^t$在$(0,+\infty)$是增函数;

(3)因为$F(x)\geqslant F(\ln ex)$,由函数$F(t)=te^t$的单调性知$x\geqslant\ln ex$,易证$x\geqslant\ln ex$成立,所以当$a\geqslant\frac{1}{e}$时,$f(x)\geqslant0$.

以上两道题目是高考的压轴题,一个是恒成立求参数范围,一个是证明不等式,两道题都含有e^x和$\ln x$函数,这两个函数属于跳阶函数,幂函数x是e^x和$\ln x$的沟通桥梁,通过恒等式$x=e^{\ln x}$,可以把幂函数化成指数函数,通过恒等式$x=\ln e^x$,可以把幂函数化成对数函数.例如几个常见的同构函数:(1)$f(x)=x\ln x$,(2)$f(x)=\frac{\ln x}{x}$,(3)$f(x)=xe^x$,(4)$f(x)=\frac{e^x}{x}$,由恒等式$x=e^{\ln x}$,可以把(1)转化为$f(x)=x\ln x=e^{\ln x}\ln x$.同理,用恒等式$x=\ln e^x$可以把(3)转化为$f(x)=xe^x=e^x\ln e^x$.掌握了这种指对互化的魔法,就可以把指对函数化成相同结构函数,从而轻松秒杀高考压轴题.

2.1.3　常见的同构函数模型

(1)双变元的同构函数经典模型[3]

①和差型:$f(x_1)-f(x_2)>k(x_1-x_2)\Rightarrow f(x_1)-kx_1>f(x_2)-kx_2\Rightarrow$同构函数为$\varphi(t)=f(t)-kt$;

②商型:$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>k$(当$x_1>x_2$)$\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>k(x_1-x_2)\Rightarrow$同构函数为$\varphi(t)=f(t)-kt$;

③积型:$x_1x_2[f(x_1)-f(x_2)]>k(x_1-x_2)$(当$x_1x_2>0$)$\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>k\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)\Rightarrow f(x_1)+\frac{k}{x_1}>f(x_2)+\frac{k}{x_2}\Rightarrow$同构函数为$\varphi(t)=f(t)+\frac{k}{t}$.

(2)指对混合的同构经典模型

①和差型:$x+e^x>x+\ln x\Rightarrow x+e^x>e^{\ln x}+\ln x\Rightarrow$同构函数为$\varphi(t)=t+e^t$;

②商型:$\frac{e^x}{x}>\frac{x}{\ln x}\Rightarrow\frac{e^x}{x}>\frac{e^{\ln x}}{\ln x}\Rightarrow$同构函数$\varphi(t)=\frac{e^t}{t}$;

③积型:$xe^x>x\ln x\Rightarrow xe^x>e^{\ln x}\ln x\Rightarrow$同构函数$\varphi(t)=te^t$;

④ 凑型：$ke^{kx}>\ln x\Rightarrow kxe^{kx}>x\ln x\Rightarrow kxe^{kx}>e^{\ln x}\ln x\Rightarrow$ 同构函数为 $\varphi(t)=te^{t}$.

2.2 同构思想在解析几何高考压轴题的应用

同构思想不仅在高考函数压轴题中广泛使用，在高考解析几何压轴题中也起到了很重要的作用. 在解析几何中，同构法完美地结合数和形，利用图形对称，方程结构对称进行同构，设而不求地解决问题，既打破了解析几何的“联立方程求解”的固定思维，还可以大大减少计算，化难为易，化繁为简. 下面通过例子不同解法深度探究同构思想在解析几何压轴的应用.

例6 （2021八省联考单选第7题）已知抛物线 $y^2=2px$ 上三点 $A(2,2)$，B，C，直线 AB，AC 是圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的两条切线，则直线 BC 的方程为（　　）.

A. $x+2y+1=0$　　B. $3x+6y+4=0$

C. $2x+6y+3=0$　　D. $x+3y+2=0$

解法1　设直线方程，联立直线与圆方程求解出直线方程，再由直线方程和抛物线方程求出点 B、C，最后再求直线 BC.（具体过程省略）

解法2（同构法）　点 A 在抛物线 $y^2=2px$ 上，即 $p=1$，抛物线方程为 $y^2=2x$.

设过点 $A(2,2)$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切的直线的方程为：$kx-y+2-2k=0$，即圆心 $(2,0)$ 到切线的距离 $d=1$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$，如图1，$k_{AB}=\sqrt{3}$，$k_{AC}=-\sqrt{3}$.

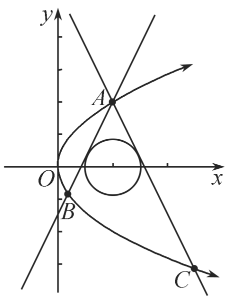

图1

设 $B\left(\dfrac{y_1^2}{2},y_1\right)$，$C\left(\dfrac{y_2^2}{2},y_2\right)$，则 $k_{AB}=\dfrac{y_1-2}{\dfrac{y_1^2}{2}-2}=\dfrac{2}{y_1+2}=\sqrt{3}$，$k_{AC}=\dfrac{2}{y_2+2}=-\sqrt{3}$，分别平方得 $3y_1^2+12y_1+8=0$，$3y_2^2+12y_2+8=0$，将 $y_1^2=2x_1$，$y_2^2=2x_2$ 化简得直线 AB：$3x_1+6y_1+4=0$，直线 AC：$3x_2+6y_2+4=0$，所以 BC：$3x+6y+4=0$，故选B.

解法3（同构法）　由题意已知抛物线为 $y^2=2x$，设 $B\left(\dfrac{y_1^2}{2},y_1\right)$，$C\left(\dfrac{y_2^2}{2},y_2\right)$，设直线 AB：$y-2=\dfrac{y_1-2}{\dfrac{y_1^2}{2}-2}(x-2)$，化简为 $2x-(y_1+2)y+2y_1=0$，又因为直线 AB 是圆的切线，所以 $\dfrac{|4+2y_1|}{\sqrt{4+(y_1+2)^2}}=1$，化简得 $3y_1^2+12y_1+8=0$，又 $y_1^2=2x_1$ 化简得 $3x_1+6y_1+4=0$；因为直线 AC 也是过 A 点的切线，结构对称，故直线 AC：$3x_2+6y_2+4=0$，所以 BC：$3x+6y+4=0$，故选B.

从上面三种解法分析，第一种方法是通法，这一方法比较容易想到，但是计算非常复杂，让学生望而生畏. 解法2是发现切线 AB，AC 的斜率通过平方之后代数式的结构相同，找出同构方程，“设而不求”，减少计算量，解决问题. 解法3是从图形的结构对称，直线 AB，AC 都是经过点 A 和圆的切线，从而发现直线方程的结构是相同，通过同构轻松巧妙解决问题.

2.3 同构思想在解析几何证明经典结论中的应用

同构解法不仅是解高考压轴题的宝剑，也是我们数学结论证明的利器，下面通过证明以下两个经典结论体现同构思想的作用.

1.（蒙日圆定理）如右图2所示，设椭圆的方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，两切线 PN 和 PM 互相垂直，交于点 P，求证点 P 在圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上.

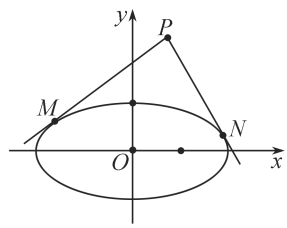

图2

证明（同构法）

设 $P(x_0,y_0)$，设过 $P(x_0,y_0)$ 的直线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，与椭圆方程为联立为 $\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0),\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 化简得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2ka^2(y_0-kx_0)x+a^2(y_0-kx_0)^2-a^2b^2=0$. 令 $\Delta=0$，化简得 $a^2k^2+b^2=(y_0-kx_0)^2$，整理得 $(a^2-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+b^2-y_0^2=0$. 设 PM，PN 的斜率为 k_1，k_2，k_1，k_2 是 $(a^2-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+b^2-y_0^2=0$ 的两根，所以 $k_1\cdot k_2=\dfrac{b^2-y_0^2}{a^2-x_0^2}=-1$，所以得 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$，故点 P 在圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上.

2.（阿基米德三角形性质）抛物线的弦两端点 M，N，过 M，N 分别做切线交于 P，三角形 PMN 叫阿基米德三角形，设底边 MN 的中点为 K，则 PK 平行于抛物线的对称轴[4].

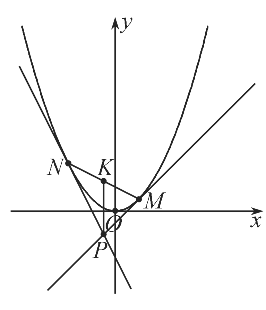

图3

证明　（如图3所示）设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则过 M 点的切线

方程为 $x_1x=p(y+y_1)$,同理过 N 点的切线方程为 $x_2x=p(y+y_2)$,又同时过 $P(x_0,y_0)$,代入得 $x_1x_0=p\left(y_0+\frac{x_1^2}{2p}\right)$, $x_2x_0=p\left(y_0+\frac{x_2^2}{2p}\right)$,由于上述两个式子结构相同,可以得到关于 x_1,x_2 的同构方程 $xx_0=p\left(y_0+\frac{x^2}{2p}\right)$,化简得 $x^2-2x_0x+2py_0=0$,因此 $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$,所以 $PK\ /\!/\ y$ 轴.

3　结束语

从上述的例子中看出同构思想在数学中的重要作用,同构思想突破常规的思维,为我们解题带来了新的思路,新的方法,新的视野.

从具体的函数和解析几何同构式的教学中发现,同构思想不仅可以提高学生运算能力和分析能力,还可以提升学生逻辑推理能力,这符合《新课标》数学运算核心素养中数学计算最高水平要求,也是计算的最高层次素养.

参考文献

[1]　陈选明.变形无意同构有法,同构遇上相似的你[J].高中数理化,2021(05):1-2.

[2]　候有岐.解开三道高考试题背后的"秘密"——同构[J].数理天地(高中版),2021(6):24-28.

[3]　张春华.同构函数在解决高考压轴题中的应用[J].数理化解题研究,2021(10):42-43.

[4]　周正文.同构算法显神力,核心素养从中来[J].知识文库,2021(04):53-55.

作者简介　柯桂宏(1990—),女,中学二级教师;荣获广州市高考突出贡献奖等;主要从事高中数学教育与教学研究.

林彩凤(1989—),女,中学二级教师;主要从事高中数学教育与教学研究.

真题解密同构显　课本一隅题根隐

——几个函数压轴题破解之法的题根与例析

陕西省汉中市龙岗学校　723102　**巨小鹏　魏　宁**

【摘　要】　解题目的在于化繁为简,以此理解数学的本质,同构法在近几年高考题中不断显现,方法让人耳目一新,做到了解题至简,也达到了理解函数性质的目的,然而这种方法的题根题源就在课本里.文中就两个函数高考压轴题所涉及同构法的例题进行剖析,找出在课本中的题根题源,并对四种类型的同构法进行举例提升总结,以深刻理解同构法的底层逻辑.

【关键词】　真题;同构;课本;题根题源

高考题源于课本,高于课本,重视课本中的例题、习题、阅读材料以及旁白思考问题是需要师生共同关注的部分,比如2020年全国2卷理科第4题北京天坛问题,在北师大版必修五第一章第二节例8中可以找到其题根题源,比如高考题中求三角形面积需要用到其坐标公式,在北师大版必修五第二章第一节例3中有所介绍,所以强调重视课本教材是高中教学不可忽视也不可错失的阵地.同构法在函数、圆锥曲线和数列等模块中的应用逐渐显现并被大家接受和认可,文中就同构法解决函数问题在课本中的题根题源做以分析,并对其内在规律总结提升,以期完成对同构法的思维构建.

1　平凡见奇生面开 —— 真题呈现

问题1　(2020年山东新高考卷·21)已知 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.若 $f(x)\geqslant 1$,求 a 的取值范围.

问题2　(2018年全国新课标Ⅰ卷文科·21)已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$.

(1)设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点.求 a,并求 $f(x)$ 的单调区间;(2)证明:当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时,$f(x)\geqslant 0$.

2　源头活水清如许 —— 课本寻根

特级教师万尔遐说过:"题海战术人笑痴,别人抓根你抓枝,抓根九九能归一,抓枝遍野怎收拾?课有本,题有根,题根课根联考根,讲课不把根题展,盲人摸象白费神."命题时,命题人在千方百计地把这个题根藏起来;解题时恰好相反,解题人则是要千方百计地把这个题根寻找到[1].找到题根题源,就找到问题的底层逻辑,以此展开思维生发生长的继续探究.