到了跳出题外看题的境界.虽然用到的知识表面上给人一种“初级感”,但也正是因为初级,所以才深入,就像物理世界,只有深入研究透了微观才能真正理解宏观.现在的教学观要求培养学生的核心素养,具体到数学上,就是要让学生养成影响终生的思维习惯、思维品质和关键能力,具体怎么培养?笔者认为在教学中如果能带领学生,从更高的维度去看问题,用更浅显的东西解释问题,学生自然能潜移默化地养成换个角度看问题、跳出圈外看问题、站在高处看问题的思维习惯.

参考文献

[1] 钟顺荣.利用伸缩变换求解直线与椭圆相切问题初探[J].中学教研(数学),2015(03):16-18.

[2] 张琴竽.活用伸缩变换巧解椭圆问题[J].中国数学教育,2009(11):39-40.

作者简介　徐玉军(1972—),男,山东东平人,一级教师,校骨干教师;近年来主要对核心素养、新高考评价体系下的教育教学、新高考题进行了一定的研究;曾获山东省数学论文二等奖,山东省课件评比一等奖,济南市课堂教学二等奖等.

齐次化方法巧解一类斜率之和(积)问题

安徽省枞阳县宏实中学　246700　朱贤良

【摘　要】 在将直线方程与圆锥曲线方程联立时,如果借助齐次化的思想方法,就可以得到关于 $\frac{y}{x}$ 的一元二次方程,从而将题目中涉及的两条直线的斜率直接视为该一元二次方程的两个根,从而根据韦达定理直接得到斜率之和与斜率之积的表达式.

【关键词】 齐次化;圆锥曲线;斜率之和;斜率之积;定点问题;定值问题

“齐次化”是一种通过构造关系式(等式或不等式)两边各项的次数相等,转化为齐次式结构,从而实现解题的一种数学转化方法.在求解圆锥曲线问题时,常常需要将直线方程与圆锥曲线方程联立,如果借助齐次化的思想方法,就可以得到关于 $\frac{y}{x}$ 的一元二次方程,从而将题目中涉及的两条直线的斜率直接视为该一元二次方程的两个根,再根据韦达定理,即可直接得到斜率之和与斜率之积的表达式.齐次化思想方法的这种操作又常被称为齐次化联立.利用这种齐次化联立与平移齐次化方法,往往可以降低一类斜率之和或斜率之积问题的运算量,实现巧解.

1　齐次化联立:常量巧代换,妙招构斜率

我们知道,当直线 $l:y=kx+m$ 与圆锥曲线 $f(x,y)=0$ 相交于 A,B 两点时,联立两者的方程,消去 y 得 $Ax^2+Bx+C=0$,根据韦达定理可得 x_1+x_2 与 x_1x_2,进而可以求得两条直线 OA 与 OB 的斜率之和 $k_{OA}+k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=\frac{kx_1+m}{x_1}+\frac{kx_2+m}{x_2}=\frac{2kx_1x_2+m(x_1+x_2)}{x_1x_2}$ 与斜率之积 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}$ 的表达式(这里的点 O 为坐标原点).这种解题思路极为常见,但若是巧施妙手,通过“齐次化联立”对其略加改进,得到关于 $\frac{y}{x}$ 的一元二次方程 $A\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2+B\cdot\frac{y}{x}+C=0$,就可以把斜率 k_{OA} 与 k_{OB} 视为该方程的两个根,这样斜率之和与斜率之积就非常容易得出来了.

例 1　(2017 年高考全国 Ⅲ 卷·理 20) 已知抛物线 $C:y^2=2x$,过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A,B 两点,圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.

(1) 证明:坐标原点 O 在圆 M 上;

(2) 略.

解析　欲证明坐标原点 O 在圆 M 上,等价于证明 $OA\perp OB$,即证明斜率之积 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$.

显然,当直线斜率为 0 时,直线与抛物线交于一点,不符合题意,故可设直线 $l:x=my+2$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

联立直线 l 与 C 的方程 $\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x = my + 2, \end{cases}$ 代换常量“2”,实现齐次化,可得 $y^2 = (x - my)x$,即 $y^2 + mxy - x^2 = 0$,等式两边同除以 x^2 得 $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + m \cdot \frac{y}{x} - 1 = 0$.

这样,$k_{OA} = \frac{y_1}{x_1}$ 与 $k_{OB} = \frac{y_2}{x_2}$ 就是此一元二次方程的两根,则 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -1$,即坐标原点 O 在圆 M 上.

评注 上述齐次化联立的过程可以归纳为两步:一是由直线与圆锥曲线方程得到齐次式 $y^2 = (x - my)x$,这是通过代换抛物线方程中的常量“2”实现的,而不是消去 x 或 y,这是与常规的联立的不同所在,也是齐次化处理的关键一步;二是将齐次式变形成关于 $\frac{y}{x}$ 的一元二次方程,这样方程的两根即为斜率 k_{OA} 与 k_{OB}.

例2 (2022年2月皖南地区高二年级开学调研·22)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2,点 $M\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 满足 $|MF_1| + |MF_2| = 2a$,且 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设 E, F 是椭圆 C 上的两个动点,O 为坐标原点,直线 OE 的斜率为 k_1,直线 OF 的斜率为 k_2,求当 $k_1 \cdot k_2$ 为何值时,直线 EF 与以原点为圆心的定圆相切,并写出此定圆的标准方程.

解析 第(1)问较易,求得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

第(2)问涉及到点、直线、圆、椭圆等较多元素,概括起来就是:直线 EF 与椭圆 C 相交,与以原点为圆心的定圆相切,求定值 $k_1 \cdot k_2$.

显然直线 EF 不经过坐标原点,故可设其方程为 $Ax + By = 1$,点 $E(x_1, y_1)$,$F(x_2, y_2)$,定圆的方程为 $x^2 + y^2 = r^2(r > 0)$.

联立直线 EF 与椭圆 C 的方程 $\begin{cases} Ax + By = 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$,齐次化得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = (Ax + By)^2$,整理得 $(12B^2 - 4)y^2 + 24ABxy + (12A^2 - 3)x^2 = 0$,等式两边同除以 x^2 得 $(12B^2 - 4) \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 24AB \cdot \frac{y}{x} + 12A^2 - 3 = 0$.

因此,$k_1 = \frac{y_1}{x_1}$ 与 $k_2 = \frac{y_2}{x_2}$ 就是此一元二次方程的两根,则 $k_1 \cdot k_2 = \frac{12A^2 - 3}{12B^2 - 4}$.

又因为直线 EF 与定圆相切,故圆心 O 到直线 EF 的距离等于半径 r,即 $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = r$,即 $A^2 = \frac{1}{r^2} - B^2$.

所以,$k_1 \cdot k_2 = \frac{12\left(\frac{1}{r^2} - B^2\right) - 3}{12B^2 - 4} = \frac{-12B^2 + \frac{12}{r^2} - 3}{12B^2 - 4}$.显然,当 $\frac{12}{r^2} - 3 = 4$ 即 $r^2 = \frac{12}{7}$ 时,$k_1 \cdot k_2 = -1$ 为定值.

综上所述,当 $k_1 \cdot k_2 = -1$ 时,直线 EF 与以原点为圆心的定圆相切,且此定圆的标准方程为 $x^2 + y^2 = \frac{12}{7}$.

评注 本题中不知道动直线 EF 的斜率、截距或过定点等特征,在设其方程时,将其方程设为 $Ax + By = 1$,这是颇为巧妙的一步,其目的是得到常量“1”,以便于得到 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = (Ax + By)^2$,轻松实现齐次化.

2 平移齐次化:坐标系平移,齐次化联立

通过上述两例,我们知道,当直线 l 与圆锥曲线相交于两点 (x_1, y_1),(x_2, y_2) 时,坐标原点 O 与两交点连线的斜率 $k_1 = \frac{y_1}{x_1}$,$k_2 = \frac{y_2}{x_2}$ 就是一元二次方程 $A \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 + B \cdot \frac{y}{x} + C = 0$ 的两个根,这样就很容易得到斜率之和与斜率之积的表达式了.但是,坐标原点之外的某一定点 (x_0, y_0) 与两交点连线的斜率 $k_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$,$k_2 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$ 就不是上述方程的两根了,其斜率之和与斜率之积问题如何求解呢?这就需要先进行坐标系的平移来解决了.

如果坐标轴的方向和单位长度都不改变,只改变原点的位置,这种坐标系的变换就称为坐标系的平移.如图1所示,在原坐标系 xOy 中,点 O' 的坐标为 (h, k),平移坐标系,得到以 O' 为坐标原点的新的坐标系 $x'O'y'$.设点 M 在原坐标系中的坐标为

(x,y),在新坐标系中的坐标为(x',y'),则其对应关系为$\begin{cases}x'=x-h,\\y'=y-k\end{cases}$或写成$\begin{cases}x=x'+h,\\y=y'+k,\end{cases}$我们称其为坐标平移公式.

设曲线C在原坐标系中的方程为$f(x,y)=0$,那么在新坐标系中的方程为$f(x'+h,y'+k)=0$;反之,如果它在新坐标系中的方程为$f(x',y')=0$,那么在原坐标系中的方程为$f(x-h,y-k)=0$.显然,坐标系平移后,点的坐标与曲线的方程会发生改变,但线段的长度、角的大小与直线的斜率并不发生改变.

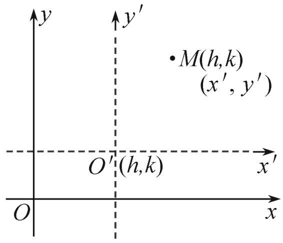

图 1

这样,前面提到的对于坐标原点之外的某一定点(x_0,y_0)与两交点连线的斜率问题,可以通过先坐标系平移,再齐次化联立来完美解决.

例 3　(2018 年高考全国 Ⅰ 卷·文 20)设抛物线$C:y^2=2x$,点$A(2,0)$,$B(-2,0)$,过点A的直线l与C交于M,N两点.

(1) 略;

(2) 证明:$\angle ABM=\angle ABN$.

解析　如图 2 所示,欲证$\angle ABM=\angle ABN$,即证$k_{BM}+k_{BN}=0$.考虑到点$B(-2,0)$不是坐标原点,故进行坐标系平移,以点B为新坐标系的原点.

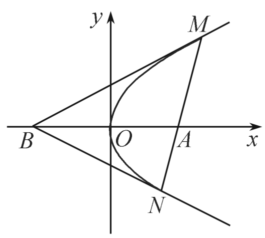

图 2

记新坐标系中,原点为B',直线l对应l',抛物线C对应C',点M,N分别对应点$M'(x_1',y_1')$,$N'(x_2',y_2')$,则$\begin{cases}x=x'-2,\\y=y',\end{cases}$直线$l$的方程$x=my+2$改变成$l'$的方程$x'-2=my'+2$,即$x'=my'+4$,抛物线$C$的方程$y^2=2x$改变为$C'$的方程$y'^2=2(x'-2)$.

联立直线l'与抛物线C'的方程$\begin{cases}x'=my'+4,\\y'^2=2(x'-2),\end{cases}$由直线方程得$2=\dfrac{x'-my'}{2}$,代入抛物线方程,齐次化得$y'^2=\dfrac{x'-my'}{2}\left(x'-\dfrac{x'-my'}{2}\right)$,即$(m^2+4)y'^2-x'^2=0$,方程两边同除以$x'^2$得$(m^2+4)\cdot\left(\dfrac{y'}{x'}\right)^2-1=0$.

这样,$k_{B'M'}=\dfrac{y_1'}{x_1'}$与$k_{B'N'}=\dfrac{y_2'}{x_2'}$就是此一元二次方程的两根,由韦达定理得$k_{B'M'}+k_{B'N'}=0$.所以,$k_{BM}+k_{BN}=0$,即$\angle ABM=\angle ABN$.

评注　平移齐次化解题的关键有二:一是坐标系的平移,要注意平移前后的“变”与“不变”,特别是不能弄错曲线在新坐标系中的方程;二是齐次化联立,本题在联立过程中,通过对常量“2”的代换,即$2=\dfrac{x'-my'}{2}$,从而实现齐次化的目的.

例 4　(2017 年高考全国 Ⅰ 卷·理 20)已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,四点$P_1(1,1)$、$P_2(0,1)$、$P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$中恰有三点在椭圆$C$上.

(1) 求椭圆C的方程;

(2) 设直线l不经过点P_2且与椭圆C相交于A,B两点.若直线P_2A与直线P_2B的斜率的和为-1,证明:直线l过定点.

解析　(1) 显然,椭圆C经过点$P_2(0,1)$、$P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,其方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

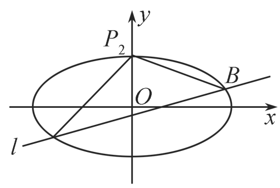

图 3

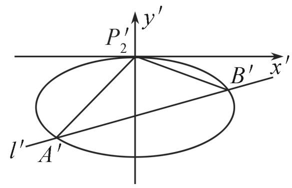

图 4

(2) 如图 3、图 4 所示,将原坐标系平移成以点$P_2(0,1)$为原点的的坐标系,记新原点为P_2',直线l对应l',抛物线C对应C',点A,B分别对应点$A'(x_1',y_1')$,$B'(x_2',y_2')$,则$\begin{cases}x=x'\\y=y'+1\end{cases}$,椭圆$C$的方程$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$改变为$C'$的方程$\dfrac{x'^2}{4}+(y'+1)^2=1$.

因为直线l'不过新坐标原点P_2',可设其方程为$mx'+ny'=1$.将直线l'与椭圆C'的方程联立$\begin{cases}mx'+ny'=1,\\\dfrac{x'^2}{4}+(y'+1)^2=1,\end{cases}$代换常量“1”,齐次化得$\dfrac{x'^2}{4}+(y'+mx'+ny')^2=(mx'+ny')^2$,整理得

$(8n+4)y'^2+8mx'y'+x'^2=0$,方程两边同除以 x'^2 得 $(8n+4)\cdot(\frac{y'}{x'})^2+8m\cdot\frac{y'}{x'}+1=0$.此一元二次方程的两根为 $k_{P_2'A'}=\frac{y_1'}{x_1'}$ 与 $k_{P_2'B'}=\frac{y_2'}{x_2'}$,由韦达定理得 $k_{P_2'A'}+k_{P_2'B'}=-\frac{8m}{8n+4}=-\frac{2m}{2n+1}$.

由题意,直线 P_2A 与直线 P_2B 斜率的和为 -1,则 $-\frac{2m}{2n+1}=-1$,即 $2m-2n=1$,故直线 l' 过定点 $(2,-2)$.

所以,在原坐标系中,直线 l 过定点 $(2,-1)$.

评注 利用平移齐次化证明定点问题时,要注意坐标系平移前后定点坐标之间的相互关系.

3 齐次化价值:悟解析本质,提运算素养

在解析几何知识的学习过程中,学生遇到圆锥曲线综合题时往往表现得束手无策、举步维艰,"会而不对,对而不全,全而不优"的现象普遍存在.究其原因,一方面是因为学生对解析几何研究问题的基本方法——坐标法的认识较为肤浅,缺乏用坐标法解决综合问题的整体设计;另一方面是因为学生大都比较害怕"运算",对运算对象的理解、运算思路的探究、运算程序的设计和运算路径的选择上存在不足[1].教师在常态课堂教学中要更多地关注学生对坐标法解题程序的整体设计和运算思路的合理选择,促进学生更好地领悟解析方法的本质,提升数学运算素养.

3.1 齐次化方法体现了运用坐标法求解综合问题的整体构思

解析几何强调利用坐标系与函数、方程的相关知识,把有关图形的几何问题,转化为关于方程的代数问题,有利于人们对几何图形及其问题的深入研究.这也是解析法(坐标法)的本质特征.如何利用坐标与方程来求解圆锥曲线中的综合问题,这往往需要解题者在审题时进行整体的构思.比如在直线与圆锥曲线相交时,我们常先根据"设而不求"的思路得到 x_1+x_2 与 x_1x_2 或者 y_1+y_2 与 y_1y_2,然后再利用这里的两根之和与两根之积实现"整体代换",去求得线段之长、三角形的面积、斜率之和与斜率之积等等,进而去判断、求解相关的最值、定点与定值等问题.

在进行解题的整体构思时,一方面,我们必须较为精准地判断出每一个题设条件的用途,以便推知由此可以得出的结论;另一方面,从问题待求解的结论出发,我们也需要对其进行合理转化,寻求破解疑难的必要条件与充分条件,从而预计沟通题设条件与问题结论的可能性.从这个意义上说,上述齐次化方法充分体现了运用坐标法求解圆锥曲线综合问题的整体构思,齐次化联立能得到什么样的结论、解决什么样的问题,平移齐次化又能达到什么样的效果,平移后的"变"与"不变"怎样来解释平移前的问题……只有对齐次化方法有了整体的认知,才能将求解的思路形成一个整体构思.

3.2 齐次化方法强化合理依据运算法则解决数学问题的能力

数学运算被列入高中阶段数学核心素养,是指在明晰运算对象的基础上,依据运算法则解决数学问题的素养.它既是一种特殊的逻辑推理,而且能较好地甄别学生解决问题的能力.由于解析几何是运用代数工具来解决几何问题,涉及到"数"与"式"的合理整合与灵活转换,"运算"往往成为许多学生在问题解决过程中的拦路虎.本文所展示的四道与斜率之和或斜率之积有关的问题,如果利用常规思路进行求解,往往会因为其较为复杂的表达形式和繁重的计算量,让学生产生畏难情绪.齐次化方法通过平移变换、齐次化简等灵活巧算的技巧和方法,合理构造出两条直线的斜率之和与斜率之积,大大简化了表达形式,降低了计算量.

因此,在平时的教学活动中,教师一方面要有意识地引导学生学会探索、归纳、梳理、总结圆锥曲线中的一些典型问题,以不变应万变,切实提高学生的解题能力与信心;另一方面,还需要引导学生从多元视角分析影响运算的相关因素,加强对理解运算对象、掌握运算法则、探究运算思路等数学运算本质的领悟与应用,不断渗透数学思路与方法,从而巩固"四基"和提升"四能".

参考文献

[1] 郭建华,于健,宁连华,张云飞.为运算找出路,发展运算素养——以 2020 年高考数学山东卷第 22 题为例[J].数学通报,2021(12):41-46.

作者简介 朱贤良(1981—),男,安徽枞阳人,高级教师;荣获市级名教师、学科带头人、骨干教师、先进教研个人与县级优秀班主任等称号;主要从事中学数学教育教学与考试研究;主编或参编教育教学图书十余本,主持省、市课题研究三项.