材内容设置,注重数学逻辑体系,完成从以往按照“知识领域 — 知识单元 — 知识点”展开教学到现在按照“主线 — 主题 — 核心内容”呈现内容,开展教学的完美转化.例如,在函数的单调性教学中,可以围绕其为主题,串联函数单调性的概念,基本初等函数的单调性,数列的单调性,利用导数研究函数的单调性等知识,这些内容的呈现是存在阶段性的,教师要在教学中能够通过设置情境,在不同阶段,合理串联起它们的关系,从整体观角度认识它们之间的关联.

4.3 让学生体验生成大概念体系,养成自主创新的思维习惯

大概念是指在某一学科中居于重要地位,对学科其他内容更具统摄力、关联性的概念.学生对知识的掌握是离散型的,要培养学生在学习的过程中串联知识,建构体系,需要教师围绕最重要、最核心的内容设置合理的问题情境.例如,通过设置开放式的问题,启发学生思考,引发学生展开联想,领悟知识之间的内在逻辑和思想方法.这样,学生应该更能体会知识的本质特点,围绕核心概念扩展知识体系.以此循序渐进地学习,逐步建立自主建构概念体系的能力,养成自主创新的思维习惯.

总之,在教学中,通过设计开放式问题,帮助学生多角度思考,有利于促进学生交流合作,培养思维的系统性、灵活性、创造性,加深对知识的整体认识,实现对主线内容的整体建构.

参考文献

[1] 任子朝等.高考数学新题型测试研究[J].数学教育学报,2015(02):21-25.

[2] 任子朝,赵轩.数学考试中的结构不良问题研究[J].数学通报,2020(02):1-3.

[3] 李刚.基于课本,提高命题的针对性和有效性[J].数学通讯,2017(02):43-47.

作者简介 李刚(1983—),男,江苏苏州人,中学高级教师;曾获江苏省高中数学优质课评比一等奖;研究方向:中学数学教育.

新高考背景下基于深度学习的“问思”型复习课模式探究

——以圆锥曲线中定点定值为例

江苏省常州市正行中学 213000 刘天程

江苏省常州市北郊高级中学 213000 程守山

【摘 要】 随着新高考改革的不断推进,尤其是八省联考以及新高考中的数学试题对学生能力的要求更为突出,对学生学习方式,教师的教学教法提出了新的考验.本文以圆锥曲线中常见的定点定值问题为课例,基于深度学习探索“问思型”复习课模式.

【关键词】 新高考;高三数学;深度学习;问思型;解析几何;定点定值

所谓深度学习是指教师借助一定的活动情景带领学生超越表层的知识符号学习,进入知识内在的逻辑形式和意义领域,挖掘知识内涵的丰富价值,完整地实现知识教学对学生的发展价值.实现这些目标需要展开确实有效的学生活动.而“问思”型教学是深度学习的有效方式,教师通过问题,提问、追问达到学生产生疑问,思考、思索、深思进入深度学习,提高思维能力.2020 年作为新高考改革的第一年,备受全国师生关注,其中全国 Ⅰ 卷和山东卷(新高考试行省)中的解析几何大题对争取双一流学校的学生来说起到至关重要的作用.而这两题都是涉及解析几何中定点定值问题,属于高频题.本文以此问题展开,引导学生深度学习,探索“问思”型深度学习复习课模式.

1 课例分析

1.1 确定复习课题(微专题)

1.1.1 数据支持,统计错误率

笔者通过比较 2020 年山东省高考数学最后一题均分 1.02 分以及常州市 2021 年期初最后一题解析几何均分 1.3 分,发现这类定点定值问题得分率

低.根据多年高三一线教学的经验,得出这类问题解题方法基本固定,但错误率高.

1.1.2　分析原因,明确重难点

分析学生错误原因主要有三类:第一类考试时间不够;第二类有时间但对题目的认知不够,不敢下手;第三类有时间但没算出来.基于以上问题我们集中分析第二三类学生,对于圆锥曲线的认识不够,对圆锥曲线的性质不能推广,仅局限于就题解题层次,没有深度学习,只停留在表层学习.需要教师课堂引导这类学生敢于发现,敢于猜想,敢于挑战,这也是我们课堂转型的重点.而没有计算出结果的学生又分为三类:第一类,计算错误;第二类,方法失当计算复杂,无法计算到最后;第三类,方法得当但运算技巧没掌握,导致离最后结果只一步之差.由此得出教学重点是引导发现问题,总结题型,归纳方法.难点是掌握运算技巧.

1.1.3　确立课题,寻找微切口

这类中档题既然是高考高频题,方法固定而且计算量大,技巧性强,错误率较高,这便是高三数学二轮复习的微专题切入口.再联系单元复习课策略了解这块内容在解析几何中的重要性,确定以此类定点定值问题展开微专题复习.

1.2　问题导向

1.2.1　数据统计,呈现问题

笔者通过呈现统计的错误率,给学生布置一个任务,寻找解析几何中定点定值问题,如下:

1.(2020 年山东卷 22 题)题目略.证明:存在定点 Q,使得 $|DQ|$ 为定值.

2.(2020 年全国 Ⅰ 卷 20 题)题目略.证明:直线 CD 过定点.

3.(2021 年常州高三期初)题目简述:点 A 是 C 上一定点,过点 B 的动直线与双曲线 C 交于 P,Q 两点,$k_{AP}+k_{AQ}$ 为定值 λ,求点 A 的坐标及实数 λ 的值.

4.(2019 年南通期末)已知椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左顶点为 A,过点 A 作不同的直线 AM,AN 分别交椭圆于 M,N 两点,其中 $k_{AM}\cdot k_{AN}=-1$,试求出直线 MN 恒过的定点.

设计意图　以上四题首先具备本次课的两种研究类型,其次都是高考或模考题具有一定的影响力,学生直接做题比较困难,用于总结归纳题型非常恰当,通过本次课学习后可以尝试使用相关方法技巧去解决问题,起到承上启下的作用.

1.2.2　问题情境,提出设想

问题 1　这 4 道题的的条件和所求结论有何异同?

问题 2　只要是圆锥曲线上任一点作斜率之和或乘积为定值的两条直线与圆锥曲线的交点所在直线都恒过定点吗?

问题 3　除了和与乘积为定值得到定点,还有其它运算的可能吗?

设计意图　通过提问引导学生产生疑问,质疑,进而思考,思索,为后面的深思做好前期引导,同时也开发了学生敢猜敢想的思维.

1.2.3　学生活动,技术验证

学生活动:借助信息技术验证上述猜想.

设计意图　技术验证这一学生活动既实现了学生对猜想的验证,又满足了其好奇心,以及对猜想结果证明的期待.同时发现的恒过 A 点本身为后续技巧的应用做好铺垫.培养学生直观想象能力和情感态度价值观,提高学习研究数学的兴趣.

1.3　题型归类

根据上面题型归类可以总结:过圆锥曲线上一点 A,作两条斜率之积(和)为定值的直线 AM,AN,与圆锥曲线的两交点所在的直线恒过定点,反之亦然.

1.4　方法归纳

1.4.1　模拟运算

例 1　已知椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 左顶点为 A,过点 A 作不同的直线 AM,AN 分别交椭圆于 M,N 两点,

(1)已知 $k_{AM}\cdot k_{AN}=-1$,试求出直线 MN 恒过的定点.

(2)已知 $k_{AM}+k_{AN}=1$,试求出直线 MN 恒过的定点.

方案 1　可以设直线 AM 的斜率为 k 与椭圆联立解出点 M 坐标,再设直线 AN,求出 N 点坐标,求出 MN 的斜率,写出 MN 的直线方程.第二问同理.

方案 1 改进:利用技巧将 M 坐标中 k 换成 $-\frac{1}{k}$ 便得到 N 点坐标,不需要解 N 点.第二问将 M 坐标中 k 换成 $1-k$ 便得到 N 点坐标

方案 2　设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,条件中 $k_{AM}\cdot k_{AN}=-1$ 代入就会出现 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=-1$ 对称式,必出现韦达定理,设出直线 MN:$y=kx+m$ 与椭圆联立,得到韦达定理找到 k 与 m 的关系,就可以得到恒过的定点.第二问代入也会出现韦达定理,方法雷同.

设计意图　设计例 1 一题两问既对以上恒过定点题型的归纳又避免学生浪费再联立方程的时间,在两问过程中让学生尝试两种方法:解点法和韦达定理设而不求法,但遇到了各自的难点,不是在“纸上谈兵”时那么轻松.揭示发现问题,提出问题,分析问题,解决问题的过程,为发展学生核心素养提供平台.

1.4.2　实践检验

解法	积战队	和战队	点评
解点	积战队学生1:直线复杂难算结果. 设 $AM:y=k(x+2)$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=k(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$, 此方程的一根为 -2,所以 $x_1=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$, $y_1=k(x_1+2)=\frac{4k}{1+4k^2}$, 所以 $M\left(\frac{2-8k^2}{1+4k^2},\frac{4k}{1+4k^2}\right)$. 用 $-\frac{1}{k}$ 替换上式的 k,得 $N\left(\frac{2k^2-8}{k^2+4},\frac{-4k}{k^2+4}\right)$. 当 $k\neq\pm1$ 时, $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{4k}{1+4k^2}-\frac{-4k}{k^2+4}}{\frac{2-8k^2}{1+4k^2}-\frac{2k^2-8}{k^2+4}}=\frac{5k}{4(1-k^2)}$. 直线 $MN:y=\frac{5k}{4(1-k^2)}\left(x-\frac{2-8k^2}{1+4k^2}\right)+\frac{4k}{1+4k^2}=\frac{5k}{4(1-k^2)}x-\frac{5k(2-8k^2)}{4(1-k^2)(1+4k^2)}+\frac{4k}{1+4k^2}$.	和战队学生1:直线复杂算不出结果. 同理: $M\left(\frac{2-8k^2}{4k^2+1},\frac{4k}{4k^2+1}\right)$, $N\left(\frac{-8k^2+16k-6}{4k^2-8k+5},\frac{4-4k}{4k^2-8k+5}\right)$ $k_{MN}=\cdots$ 复杂 $\cdots=-\frac{(2k-1)^2}{4}$, MN 直线太过复杂难以写出. $MN:y-\frac{4k}{4k^2+1}=-\frac{(2k-1)^2}{4}\left(x+\frac{8k^2-2}{4k^2+1}\right)$.	解点方法优点是容易拿到过程分,按步得分.缺点是不容易算出结果
点评	积战队学生2:别忘记斜率不存在时的讨论, MN 关于 x 轴对称,令 $y=0$,解出 x 就可以了. 当 $x_1\neq x_2$ 时, $MN:y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+y_1$, 令 $y=0$,得 $x=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}=\frac{\frac{2k^2-8}{k^2+4}\cdot\frac{4k}{1+4k^2}-\frac{2-8k^2}{1+4k^2}\cdot\frac{-4k}{k^2+4}}{\frac{4k}{1+4k^2}-\frac{-4k}{k^2+4}}$ $=\frac{-24k^3-24k}{20k^3+20k}=-\frac{6}{5}$.	和战队学生3:这题不关于 x 轴对称,容易认为是对称.	和值无法互换不具有对称性
韦达定理	因为 $k_{AM}\cdot k_{AN}=-1$,所以 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=-1$, $y_1y_2+(x_1+2)(x_2+2)=0$, 化简得 $(1+k^2)x_1x_2+(km+2)(x_1+x_2)+m^2+4=0$, $(1+k^2)\cdot\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+(km+2)\cdot\frac{-8km}{1+4k^2}+m^2+4=0$, $5m^2-16km+12k^2=0$, $(5m-6k)(m-2k)=0$, 得 $m=\frac{6}{5}k$ 或 $m=2k$. 当 $m=\frac{6}{5}k$ 时, $y=kx+\frac{6}{5}k=k\left(x+\frac{6}{5}\right)$,恒过定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$. 当 $m=2k$ 时, $y=kx+2k=k(x+2)$,恒过定点 $(-2,0)$ 舍去. 综上,直线 MN 恒过定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$. 积战队学生3:疑惑为何求出有一解是 A 点?	$k_{AM}+k_{AN}=\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=1$, 韦达定理带入: $m^2-(4k+1)m+4k^2+2k=0$, 难以因式分解,借助恒过点 $(-2,0)$, $m=2k$ 可得另一解 $m=2k+1$, $y=kx+2k+1$ 恒过定点 $(-2,1)$.	注意恒过已知点的性质的运用
点评	师:从形上刚刚几何画板看到确实有两个定点,其中一点便是 A 点,从代数角度看 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=-1$,分母乘到右边后与原来式子不等价,会增加分母为零的根.如果最后因式分解难分解,这个现象给我们什么启示? 学生4:此题最后是关于 m 的一元二次方程,知道恒过一点 $A(-2,0)$ 知 $m=2k$ 可以得到另外一解.	探索队学生1总结:解点法,容易得过程分,但直线复杂需要利用对称性,和为定值无法确定对称性,整体不如韦达定理设而不求的方法;韦达定理设而不求法要注意恒过已知点 A 的应用,减轻因式分解的负担.总体方面设直线韦达定理方法比较适合求解恒过定点问题.	

设计意图　本次学生活动是本节课解决问题的最重要过程,是学生遇到问题、分析问题的逻辑过程,是深度学习过程. 通过两个方法不同题型的比较,老方法有时不能用,计算过程复杂程度的比较让学生自然而然地感知方法的优劣.

1.4.3　总结归纳

学生总结如图(1) 思维过程:

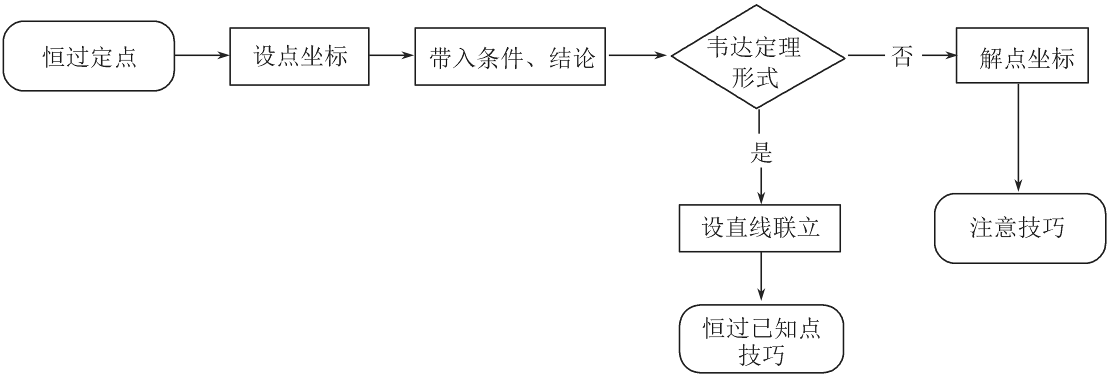

图 1

设计意图　教会学生如何学会学习,通过模拟预算,亲身经历总结出解题思维导图,尽管不尽完美,但这样的尝试过程让学生脑容量进一步扩容,解题思维能力进一步提高.

1.5　方法应用

例 2　(2020 年全国 Ⅰ 卷 20 题改编) 如图 2,已知椭圆方程$\frac{x^2}{4}+y^2=1$左顶点为 A,右顶点为 B,过 $(1,0)$ 的直线 MN 交椭圆于 M,N 两点,AM,BN 交于点 T.

求证:T 点在一条定直线上.

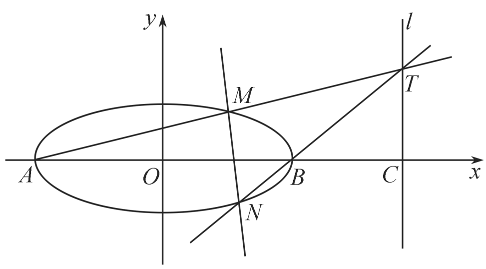

图 2

方案 1　设 M,N 点坐标分别列出 AM,BN 的方程,根据对称性猜测 T 点在垂直于 x 轴的定直线上,解出 x 为定值.

方案 2　解交点很复杂,可以两式相除,证明$\frac{x-2}{x+2}=\frac{(x_1-2)y_2}{(x_2+2)y_1}$为定值就可以.巧设 MN:$x=ty+1$ 与椭圆联立得$(t^2+4)y^2+2ty-3=0$,化简$\frac{x-2}{x+2}=\frac{ty_1y_2-y_2}{ty_1y_2+3y_1}$,但无法用韦达定理.

追问:没出现韦达定理,能构造吗? 还是前面总结得方法不好,需要创新,还是要重新归纳题型?

追问:试试这个$\frac{x-2}{x+2}=\frac{ty_1y_2-(y_1+y_2)+y_1}{ty_1y_2+3y_1}$.韦达定理带入,$x=4$.

追问:我们再观察一下,在带入韦达定理前系数与最后结果有何关系?

学生:y_1 前面系数之比与结果一样,可以提前知道答案.

追问:除了保留 y_1 的构造还能怎样构造? 试试其他.

学生:$\frac{x-2}{x+2}=\frac{ty_1y_2-y_2}{ty_1y_2+3(y_1+y_2)-3y_2}$系数一样比值为$\frac{1}{3}$.

追问:连结 AN 能发现和前面的题目有什么关系? MN 恒过 $(1,0)$ 说明 AM,AN 斜率之积是定值.根据椭圆的第三定义 $k_{AM}\cdot k_{BN}=-\frac{b^2}{a^2}$,找到 AM 和 BN 的斜率关系,可以求出 T 点横坐标.

设计意图　此改编题是对以上问题的发展,没有出现韦达定理的定点定值问题是如何应对,是化简化归到原来思路呢,还是思考需要新的方法? 还是对题型要重新归纳? 是本次课深度学习模式构建的思维过程,当新题型用老套路时遇到了新问题需要考虑化归还是创新,进一步发展学生“四能”,是本次深度学习的高潮部分.

1.6　总结提炼

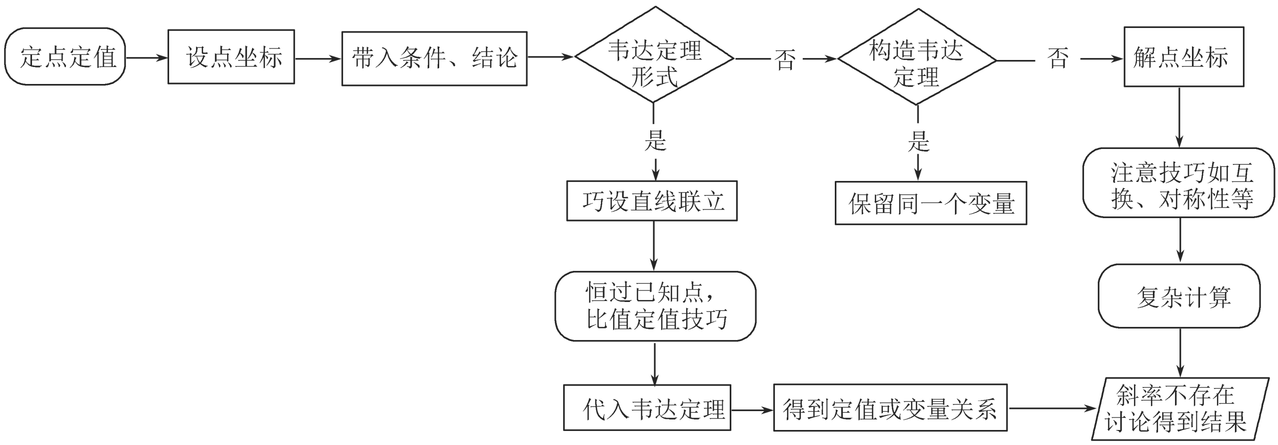

图3

本次课归纳了解析几何中一类定点定值问题，并尝试如图3思维过程，比较了两种解决这类问题的方法，韦达定理设而不求更适合，但在过程中遇到新问题需要转化，善于发现利用解题技巧可以轻松解题，利用图3解题思维导图去尝试文首的四道真题，使本课有始有终.

2 “问思”型复习课策略

2.1 “问思”型教学的理解

问，对教师来讲是教学内容，是学问，对学生来讲是疑问，以学生为主体是问道，以教师为主导是提问，甚至追问；思，是问的表征，对学生来讲遇到疑问便会思考，思考后索取解决问题的办法是思索，再通过追问引导学生深思进入深度学习，进而产生了学问达到了教学目标，最终提高学生思维能力，如图4.所以“问思”型教学是重要的学生活动，是提高学生四能的有效学习过程.

图4

2.2 “问思”型复习课教学模式的构建

通过以上课例的呈现，总结深度学习过程经历了如图5的探索过程，首先利用数据分析，大数据统计对一类题型的总结归纳，根据新课程标准以及维果斯基的“最近发展区理论”确定课题和教学目标，创设问题情境或者以问题为导向突显研究问题的必要性，通过问题导向进行归纳总结题型，通过探索尝试归纳方法技巧，提问、追问等学生活动引导学生思考、思索，深思进入深度学习，再经过方法应用发展问题，或者创新方法或者重新归纳，感知深度学习过程，最后进行总结提炼.

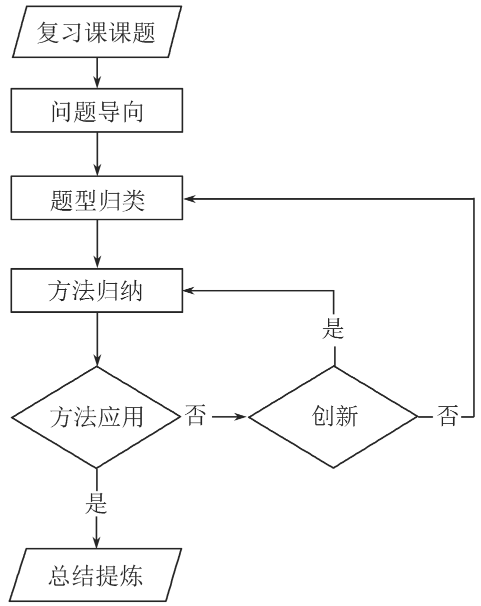

图5

2.3 “问思”型复习课的实施建议

2.3.1 活动真实，注重追问

问题情境，问题引导，学生活动要体现真实性.这既是教育学基本原则的体现，又是为学生进入深度学习前做准备，让学生感受真实情景，提出实际问题是展开学生活动的关键.其中学生活动中，小组活动、分组要考虑合理性、时效性.教学活动中更应关注教学追问，考虑追问的时机，追问的度.有效的追问能够带领学生进入沉思，有利于学生深度学习.

2.3.2 发展思维，注重过程

学生核心素养的发展是新课标对数学教学目标的要求，它最突出的表现就是发展学生的思维能力，而新课标中的四基：基本知识、基本技能、基本思想和基本活动，前三者是教学内容，而基本活动则是借助“问思”型教学方式或途径，经过多次“问思”活动

进行深度分析,深度加工传递其知识、方法与思想,通过传授知识与"问思"过程发展学生能力,提高其思维能力,切忌不能为了完成教学任务或者教学内容而忽略学生学习过程中遇到的共性问题,深刻明白教学的目的是为了发现问题而不是为了任务去回避问题,注重过程性学习、过程性评价是有效"问思"型教学的关键.

2.3.3　以人为本,注重能力

以学生为主体,关注知识的同时更应关注人,是现代教育学理念.在"问思"型深度教学中更应关注人,面向全体,关注每一个人的发展.通过数学深度学习培养学生"四能"(发现问题,提出问题,分析问题,解决问题)是数学教学的根本目标.注重学生能力的培养,实现让学生用数学的眼光观察世界,数学的思维思考世界,数学的语言表达世界是学生能力发展的最终目标.

参考文献

[1]　邵利荣.基于深度学习的解析几何中的范围、最值问题微设计[J].中学数学教学参考,2021(04):60-62.

[2]　刘天程.解密数学课堂追问,提升思维能力[J].中学教研(数学),2021(02):24-27.

作者简介　刘天程(1985—),男,江苏淮安人,中学一级教师,常州市学科中心组核心成员;主持过 2 项省市级课题,参与多个省市级课题研究,发表近 20 篇论文.

程守山(1976—),男,江苏泰州人,中学高级教师;有多篇论文发表.

两类特殊的排列组合问题及排列组合问题的物理解法

浙江省嘉善第二高级中学　314100　鲁和平

【摘　要】 排列组合历来是高中数学学习的难点.随着命题研究的深入,考查排列组合的题材及背景也在不断创新.本文研究了两类特殊的排列组合问题及排列组合问题的物理解法.

【关键词】 排列组合;网格;有序数组;物理操作

排列组合历来是高中数学学习的难点.随着命题研究的深入,考查排列组合的题材及背景也在不断创新.其中以"网格"形式考查排列组合、以"有序数组"形式考查排列组合尤为居多.并且在解题方法上也在与时俱进.运用"物理操作",解决排列组合问题也令人耳目一新,拍案惊奇.

1　网格中的排列组合问题

网格是学生在儿童时代就接触到的游戏类事物.它的构成之精巧,变化之复杂,令每个学生记忆犹新流连忘返.到了高中,由于网格集聚了很多的点、线、三角形、四边形等几何元素,以网格为载体,考查排列组合知识,成为众多命题者青睐的对象.下面就对网格中的排列组合问题进行题型和解法归类.

1.1　限格填数

例 1　有 8 张卡片分别标有数字 1,2,3,4,5,6,7,8.从中取出 6 张卡片排成 3 行 2 列,要求 3 行中,仅有中间一行的两张卡片数字数字之和为 5,则不同的排法有多少种?

解　分步考虑,在中间一行先填"2,3",再考虑填"1,4".

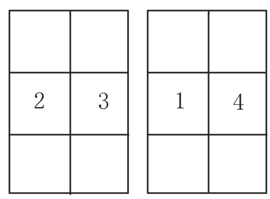

图 1

若先填"2,3",则其余 4 个格子填的数有以下 4 种情形:

1)无 1 无 4,有 A_4^4 种.

2)有 1 无 4,有 $C_4^1 \cdot A_4^3$ 种.

3)无 1 有 4,有 $C_4^1 \cdot A_4^3$ 种.

4)有 1 有 4,有 $C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot A_4^2$ 种.

若先填"1,4",根据对称性,同样有上述 4 种情形.

故不同的排法有:$N = 2A_2^2 \cdot (A_4^4 + C_4^1 \cdot A_4^3 + C_4^1 \cdot A_4^3 + C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot A_4^2) = 1248$ 种.

1.2　单调数列

例 2　将前 8 个正整数填入 2 × 4 的方格,每格一数,使得每一行的四个数从左往右递增,每一列的两个数从下往上递增,则不同的填入方式有多少种?

解　显然"1",只能填左下角,"8"只能填右上角,且"2"只能在"1"的邻格内,"7"只能在"8"的