函数与数列的“互视”

上海市高境第一中学　200439　陈　骏

【摘　要】 函数与数列都是高中数学教学中的重要内容,通常我们都习惯于从函数的角度来看数列,这样既自然又有效.在此基础上,笔者又尝试着从数列的角度来看函数,揭示知识之间的联系.

【关键词】 函数;数列;逆向观察

函数与数列都是高中数学教学中的重要内容.按照教材编排,通常是在高一先学习函数,再到高二学习数列.教科书中也提到“从函数的观点看,数列可以看成以正整数集(或其子集)为定义域的函数 $a_n=f(n)$”[1].这样一来,从函数的角度去看数列显得顺理成章.的确,在解决某些数列问题时,利用函数的思想、观点和方法可以达到事半功倍的效果.

1　从函数角度看数列

例1　在等差数列$\{a_n\}$中,S_n是其前n项的和,公差$d\neq 0$.

(1) 若$a_m=n,a_n=m(m\neq n)$,求a_{m+n};

(2) 若$S_m=S_n(m\neq n)$,求S_{m+n}.

数列解法　(1) 由题意得$\begin{cases}a_1+(m-1)d=n,\\a_1+(n-1)d=m,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=m+n-1,\\d=-1,\end{cases}$所以$a_{m+n}=a_1+(m+n-1)d=m+n-1-(m+n-1)=0$.

(2) 由$S_m=S_n$,得$a_1m+\frac{m(m-1)}{2}d=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$,整理得$a_1(m-n)=\frac{d}{2}(n-m)(n+m-1)$,即$a_1=-\frac{d}{2}(n+m-1)$,所以$S_{m+n}=a_1(m+n)+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}d=a_1(m+n)-a_1(m+n)=0$.

函数解法　(1) 由于等差数列的通项a_n是关于n的一次函数,可看作一条同时过点$A(m,n)$和$B(n,m)$的直线(如图1),由对称性可知该直线的斜率为-1,且与x轴交于点$C(m+n,0)$,即$a_{m+n}=0$.

(2) 由于$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$是关于$n$的二次函数,且常数项为0,令$f(x)=\frac{d}{2}x^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)x$,由$S_m=S_n$,得$f(m)=f(n)$,则二次函数关于直线$x=\frac{m+n}{2}$对称(如图2),故有$f(m+n)=f(0)=0$,即$S_{m+n}=0$.

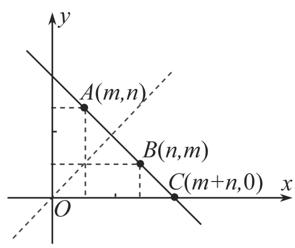

图1

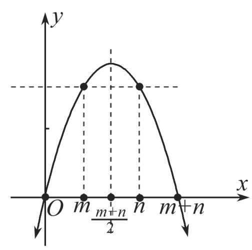

图2

例2　在数列$\{a_n\}$中,$a_n=(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n$,求$\{a_n\}$的最大项.

数列解法　作差可得:$a_{n+1}-a_n=(n+2)\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n=\frac{9-n}{11}\left(\frac{10}{11}\right)^n$,所以当$1\leqslant n<9$时,$a_{n+1}>a_n$,即$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_9$;当$n=9$时,$a_{n+1}=a_n$,即$a_{10}=a_9$;当$n>9$时,$a_{n+1}<a_n$,即$a_{10}>a_{11}>a_{12}\cdots$,所以数列的最大项为$a_9=a_{10}=\frac{10^{10}}{11^9}$.

函数解法　令函数$f(x)=(x+1)\left(\frac{10}{11}\right)^x$,求导得$f'(x)=\left(\frac{10}{11}\right)^x+(x+1)\left(\frac{10}{11}\right)^x\ln\frac{10}{11}$,解$f'(x)>0$,得$x<-\frac{1}{\ln\frac{10}{11}}-1\approx 9.49$,即$f(x)$在$(-\infty,9.49)$上单调递增,在$(9.49,+\infty)$上单调递减,当$x\approx 9.49$时函数取得极大值,由于在数列中$n\in\mathbf{N}^*$,故取临近的正整数$n=9$或10时$\{a_n\}$为最大项,实际计算得$a_9=a_{10}=\frac{10^{10}}{11^9}$.

评析　利用函数的图象或运算就能解决数列的问题,毕竟数列本质就是函数.除此之外,利用函数的其它性质,如单调性、周期性、最值,都可以有效地解决相应的数列问题.有时甚至能突破常规思路,达到“秒杀”的效果,这需要学习者不光熟练掌握函数的各种性质,还

能在类似的问题情景中灵活变通地应用.

偶有一日,笔者看到当代诗人卞之琳《断章》中的一句"你在桥上看风景,看风景的人在楼上看你"[2],于是突发奇想:是不是可以互换视角,把"桥上"的函数视为"风景"呢?

2 从数列角度看函数

例3 设$g(x)$是定义在$\mathbf{R}$上以1为周期的函数,若函数$f(x)=x+g(x)$在区间$[3,4]$上的值域为$[-2,5]$,则$f(x)$在区间$[-10,10]$上的值域为______.

函数解法 若$x\in[4,5]$,则$x-1\in[3,4]$,$f(x-1)\in[-2,5]$,于是$f(x)=x+g(x)=x+g(x-1)=x-1+g(x-1)+1=f(x-1)+1\in[-1,6]$,同理可得,若$x\in[-10,-9]$,则$f(x)\in[-15,-8]$,…,若$x\in[9,10]$,则$f(x)\in[4,11]$,所以$f(x)$的值域为$[-15,-8]\cup\cdots\cup[-1,6]\cup\cdots\cup[4,11]=[-15,11]$.

数列解法 由于$g(x)$是以1为周期的函数,即$g(x+1)=g(x)$,不妨看作数列$\{g_n\}$满足$g_{n+1}=g_n$,显然是一个常数列(实际上函数$g(x)$的值域是一个固定的区间),不妨设$g_n=t$.再把函数$f(x)$看作数列$\{f_n\}$,则$f_n=n+t$,显然是一个公差为1的等差数列,故函数$f(x)$在区间$[4,5]$上的值域比在区间$[3,4]$上的值域$[-2,5]$整体增加1个公差,为$[-1,6]$,在区间$[5,6]$上的值域增加2个公差为$[0,7]$,……,同理在区间$[9,10]$上的值域增加6个公差,为$[4,11]$,而在区间$[-10,-9]$上的值域则减少13个公差,为$[-15,-8]$.综合以上,$f(x)$在区间$[-10,10]$上的值域为$[-15,11]$.

例4 已知定义在$[0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(x)=3f(x+2)$.当$x\in[0,2)$时,$f(x)=-x^2+2x$.设$f(x)$在$[2n-2,2n)$上的最大值为$a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,且数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$______.

函数解法 可知$a_1=f(1)=1$,当$x\in[2,4)$时,求得解析式为$f(x)=\frac{1}{3}(-x^2+6x-8)=-\frac{1}{3}(x-3)^2+\frac{1}{3}$,所以$a_2=f(3)=\frac{1}{3}$;当$x\in[4,6)$时,求得解析式为$f(x)=\frac{1}{9}(-x^2+10x-24)=-\frac{1}{9}(x-5)^2+\frac{1}{9}$,所以$a_3=f(5)=\frac{1}{9}$,…,归纳猜测得$a_n=f(2n-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$.

数列解法 由$f(x)=3f(x+2)$,得$\frac{f(x+2)}{f(x)}=\frac{1}{3}$($f(x)=0$除外),可把函数$f(x)$看作公比为$\frac{1}{3}$的等比数列群,每一项的"宽度"为2,区间$[0,2)$上对应的所有函数值皆为首项,区间$[2,4)$上对应的所有函数值皆为第二项,……,区间$[2n-2,2n)$上对应的所有函数值皆为第$n$项.由于$a_1=1$,则$a_2=a_1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,$a_3=a_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$,…,$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{3}{2}$.

评析 用数列的思想反过来解决函数问题时,略显"简单粗暴".本质上是把原来较复杂的函数简化成了另一个函数,将不是必须的条件剔除掉,抓住主要的关系即可,而表达式只是一个表达的形式而已,$f(n)$即a_n,a_n即$f(n)$.因为数列模型本身就比函数模型简单,非等差即等比,前后关系就在项与项之间,所以简化之后计算难度也会随之降低.

3 结束语

笔者从最初有这个"逆向观察"的想法到发现可应用的例题,着实有点小惊喜,但是深入探究后发现这种逆向处理存在一定的局限性.一是可被套用的数列模型较少,高中阶段相对熟练的也就只有等差数列和等比数列两种;二是对于解析式已经明确的函数,"粗犷"的数列显得无计可施,反倒是抽象函数更便于转化;三是这种方法并不适用于解答题,因为它更像是一种特殊法,仅在填空题和选择题中体现其作用.

新课程标准里对当下数学教育提出了要求:会用数学的眼光观察世界,会用数学的思维分析世界,会用数学的语言表达世界."逆向观察"是一个挺有意思的想法,由此"逆向思考"和"逆向处理"紧随其后,既能深刻感受知识之间的联系,又能得到出乎意料的结果,倒也不失为一种创新意识.

谁是风景?谁又是看风景的人?谁在桥上?谁又在楼上?桥上的人或许也能看到远处楼台的窗前有个人影……函数与数列本就"代数一家亲",若是换位去思考,都会成为彼此眼中的"美好".

参考文献

[1] 上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会.高级中学课本数学高中二年级第一学期[M].上海:上海教育出版社,2007:6.

[2] 卞之琳.鱼目集[M].北京:人民文学出版社,2001.1:08.

作者简介 陈骏(1982—),男,中学一级教师,上海市高境第一中学数学教研组组长,宝山区教学能手;主要研究高中数学教学与高考、HPM教学案例、数学建模教学案例.