从一道高考题变式谈指对混合式的五种处理思路

李志娜　（河北省邯郸市第一中学　056002）

摘　要：以一道高考变式题为例，说明含指对混合式的不等式恒成立问题的常见解题思路和方向，包括：含参分类讨论法及优化、指对混合式进行同构或凹凸转化后再处理、利用切线放缩等．此外，同构可以有多种方式，切线放缩也需注意变量范围的变化．

关键词：指对混合；不等式恒成立；解题思路

文章编号：1004-1176（2022）07-0078-03

邯郸市 2022 届高三质检考试的压轴导数题，是一道指对混合的不等式恒成立问题．题目如下：

已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-x$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)+x-1\geqslant \ln x-\ln a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

可以看出，此题第（2）题与 2020 年山东高考试卷的第 21 题基本相同．此题可从不同角度解决，有多种思路和方法，略去第（1）问，现将第（2）问的 5 种思路整理分析如下．

1　含参分类讨论

方法 1　令 $g(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1$，则 $g'(x)=ae^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，由于 $y_1=ae^{x-1}$ 为增函数，$y_2=\dfrac{1}{x}$ 为减函数，故 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数．

当 $a>1$ 时，$g'\left(\dfrac{1}{a}\right)=a\left(e^{\frac{1}{a}-1}-1\right)<0$，$g'(1)=a-1>0$，存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{a},1\right)$ 使得 $g'(x_0)=0$（此处用极限解决极值点存在问题可以适当降低难度），且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$．因此，$g(x)_{\min}=g(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a-1$（*）．由 $g'(x_0)=ae^{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0}=0$ 可得 $ae^{x_0-1}=\dfrac{1}{x_0}$，即 $\ln a=1-x_0-\ln x_0$，代入（*）式，得 $g(x_0)=\dfrac{1}{x_0}-x_0-2\ln x_0$．令 $h(t)=\dfrac{1}{t}-t-$

（1）略；（2）设 a,b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$．

解析　（2）先证 $2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$，依题意 $\dfrac{\ln a+1}{a}=\dfrac{\ln b+1}{b}$．令 $x_1=\dfrac{1}{a}$，$x_2=\dfrac{1}{b}$，则 $f(x_1)=f(x_2)$，又 $f(e)=0$，所以 $0<x_1<1<x_2<e$．设 $g(x)=f(x)-f(2-x)$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，所以 $g(x_1)<g(1)=0$，即 $f(x_1)-f(2-x_1)<0$，得 $f(x_2)<f(2-x_1)$，所以 $2<x_1+x_2$，$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 得证．

点评　此类构造主要有两种类型：① 若比较 x_1+x_2 与 $2x_0$ 的关系，则构造 $g(x)=f(x)-f(2x_0-x)$；② 若比较 x_1x_2 与 x_0^2 的关系，则构造 $g(x)=f(x)-f\left(\dfrac{x_0^2}{x}\right)$．

3.2　齐次化构造函数

解析　（2）再证 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$．设 $\dfrac{x_2}{x_1}=t>1$，则 $x_2=tx_1$，由 $x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$ 得 $x_1=e^{1-\frac{t\ln t}{t-1}}$，$x_2=te^{1-\frac{t\ln t}{t-1}}$．设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}(x>1)$，$t>1$ 时，$g(t+1)<g(t)$，即 $e^{-\frac{t\ln t}{t-1}}+te^{-\frac{t\ln t}{t-1}}<1$，即 $e^{1-\frac{t\ln t}{t-1}}+te^{1-\frac{t\ln t}{t-1}}<e$，得证．

点评　这类构造将多元变量利用齐次式变成单一变量，再构造函数进行解决，可以减少多变量带来的麻烦．

4　结语

新高考背景下函数的运用依然广泛，对于构造函数，需要打破原题中的思维束缚，灵活地运用构造法，找准最能反映考题结构特点的函数，以便使问题得到快速的解决．这就要求学生在平时的学习中要善于积累，大胆尝试，将“构造”摆心间，这样面对复杂的压轴题时才能做到“不畏浮云遮望眼”．

$2\ln t$, $t\in\left(\frac{1}{a},1\right)$, $a\in(1,+\infty)$,因为 $y_3=\frac{1}{t}$ 为减函数,$y_4=t+2\ln t$ 为增函数,所以 $h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 上是减函数,故 $h(t)>h(1)=0$.从而 $g(x)_{\min}=g(x_0)>0$,故 $a>1$ 符合题意.

当 $a=1$ 时,$g(x)\geqslant g(1)=0$,故 $a=1$ 符合题意.

当 $0<a<1$ 时,$g(1)=a-1+\ln a<0$,故 $0<a<1$ 不符合题意.

综上所述,a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

方法 2(必要性探路+换主元)　令 $g(1)=a-1+\ln a\geqslant 0$,得 $a\geqslant 1$.令 $t(a)=ae^{x-1}+\ln a-\ln x-1$,因为 $e^{x-1}>0$,所以 $t(a)$ 为 $[1,+\infty)$ 上的增函数,故只须证明 $a=1$ 时,$g(x)=e^{x-1}-\ln x-1\geqslant 0$.因为 $e^{x-1}\geqslant x$,$\ln x\leqslant x-1$,所以 $g(x)\geqslant 0$.

上述思路是处理不等式恒成立问题的常见思路,但由于指对数同时出现,使得构造的含参函数最值经常会出现隐零点的问题,计算量和思维量都较大.

2　同构法

方法 3(和型同构 1)　由于 $ae^{x-1}-1\geqslant \ln x-\ln a$ 恒成立,即 $e^{\ln a}e^{x-1}\geqslant \ln x-\ln a+1$,所以 $e^{x+\ln a-1}+x+\ln a-1\geqslant e^{\ln x}+\ln x$.因为 $y=e^t+t$ 为增函数,所以 $x+\ln a-1\geqslant \ln x$ 恒成立.

或 $e^{x+\ln a-1}+\ln e^{x+\ln a-1}\geqslant x+\ln x$,利用 $y=\ln t+t$ 的单调性,转化为 $e^{x+\ln a-1}\geqslant x$ 恒成立,即 $x+\ln a-1-\ln x\geqslant 0$,由常见不等式 $x-1\geqslant \ln x$ 易得 a 的范围.

方法 4(和型同构 2)　原不等式变形为 $ae^{x-1}+x-1\geqslant \ln x+x-\ln a$,即设定目标函数是单调增函数 $y=ae^t+t$,再将右边变形,得 $ae^{x-1}+x-1\geqslant \ln\frac{x}{a}+ae^{\ln\frac{x}{a}}$,所以 $x-1\geqslant \ln\frac{x}{a}$,以下同方法 3.

方法 5(积型同构 1)　由 $ae^{x-1}-1\geqslant \ln x-\ln a$ 恒成立,得 $e^{x-1}\geqslant \frac{1}{a}\left(\ln\frac{x}{a}+1\right)$.因为 $x>0$,所以 $xe^{x-1}\geqslant \frac{x}{a}\left(\ln\frac{x}{a}+1\right)=\left(\ln\frac{x}{a}+1\right)e^{\ln\frac{x}{a}+1-1}$.对于函数 $y=te^{t-1}$,因为 $y'=(t+1)e^{t-1}$,所以该函数在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减,在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,且当 $t>0$ 时,$y>0$,当 $t<0$ 时,$y<0$(图 1).

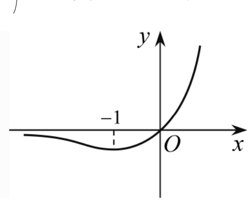

图 1

已知 $x>0$,$a>0$,当 $\ln\frac{x}{a}+1\leqslant 0$ 时,$\frac{x}{a}\left(\ln\frac{x}{a}+1\right)=\left(\ln\frac{x}{a}+1\right)e^{\ln\frac{x}{a}+1-1}<0<xe^{x-1}$ 成立;当 $\ln\frac{x}{a}+1>0$ 时,利用函数 $y=te^{t-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,可得 $x\geqslant \ln\frac{x}{a}+1$.总之,$x\geqslant \ln\frac{x}{a}+1$ 恒成立,即 $x-1-\ln x+\ln a\geqslant 0$,下同方法 3.

方法 6(积型同构 2)　原不等式变形为 $\frac{ae^x}{e}\geqslant \ln\frac{ex}{a}$,因为 $x>0$,所以不等式变形为 $\frac{ex}{a}\cdot\frac{ae^x}{e}\geqslant \frac{ex}{a}\ln\frac{ex}{a}$,即 $e^x\ln e^x\geqslant \frac{ex}{a}\ln\frac{ex}{a}$.接下来借助函数 $y=t\ln t$ 的单调性和函数值的正负,分类讨论,类似方法 5,同样可以化简得到 $e^x\geqslant \frac{ex}{a}$,故 $a\geqslant \frac{x}{e^{x-1}}$ 恒成立,易得 $a\geqslant 1$.

上述思路需要学生能够从指对数同时出现的式子中,观察并构造出同构,即同为和型或积型.这种思路对学生处理代数式的变形能力要求比较高.

3　反函数法

方法 7　原不等式变形为 $\frac{ae^x}{e}\geqslant \ln\frac{ex}{a}$,令 $y_1=\frac{ae^x}{e}$,$y_2=\ln\frac{ex}{a}$,则两个函数互为反函数,所以不等式恒成立,等价于 $y_1=\frac{ae^x}{e}$ 的图象在 $y_2=\ln\frac{ex}{a}$ 上方,只需 $y_1=\frac{ae^x}{e}$ 图象在 $y=x$ 上方,故 $\frac{ae^x}{e}\geqslant x$ 恒成立,即 $a\geqslant \frac{x}{e^{x-1}}$,下同方法 6.

4　放缩法

方法 8(放缩法 1)　因为 $x>0$,$a>0$,所以 $e^x\geqslant x+1$,$e^{x-1}\geqslant x$,故 $ae^{x-1}\geqslant ax$(当 $x=1$ 时取等号).又因为 $\ln x\leqslant x-1$(当 $x=1$ 时取等号),所以 $ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1\geqslant ax-x+1+\ln a-1=(a-1)x+\ln a$.

①$a=1$ 时,$e^{x-1}-\ln x-1\geqslant x-x+1+\ln 1-1=0$,此时不等式恒成立;

②$a>1$ 时,$ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1\geqslant (a-1)x+\ln a$,因为 $x>0$,$a>1$,所以 $(a-1)x+\ln a>0$,即不等式恒成立;

③$0<a<1$ 时,由上几种方法可知,$x=1$ 时不

等式不成立．

所以，$a\geqslant 1$．

方法 9(放缩法 2)　将 $ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1\geqslant 0$ 变为 $e^{x+\ln a-1}-\ln x+\ln a-1\geqslant 0$．因为 $e^{x+\ln a-1}\geqslant x+\ln a$(当 $x+\ln a=1$ 时取等号)，$\ln x-\ln a+1\leqslant x-\ln a$(当 $x=1$ 时取等号)，所以 $e^{x+\ln a-1}-\ln x+\ln a-1\geqslant x+\ln a-(x-\ln a)=2\ln a$．令 $2\ln a\geqslant 0$，得 $a\geqslant 1$．以下同方法 8 的③．

采用指数和对数式同时放缩是非常大胆的尝试，也有可能放缩过度．可以鼓励学生只对指数或对数放缩．另外，放缩后参数范围是否保持不变，如 $ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1\geqslant 0$ 恒成立与 $ax-\ln x+\ln a-1\geqslant 0$ 恒成立，理论上是否等价？不等价又如何处理？可进一步思考．

5　凹凸转换法

方法 10(凹凸转化 1——商型)　由题意知 $ae^{x-1}-1\geqslant \ln x-\ln a$，因为 $x>0$，$a>0$，所以原不等式等价于 $\dfrac{ae^{x-1}}{x}\geqslant\dfrac{\ln x-\ln a+1}{x}$．令 $g(x)=\dfrac{ae^{x-1}}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{ae^{x-1}(x-1)}{x^2}$，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，从而 $g(x)\geqslant g(1)=a$．令 $h(x)=\dfrac{\ln x-\ln a+1}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{\ln a-\ln x}{x^2}$，故 $h(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减，故 $h(x)\leqslant h(a)=\dfrac{1}{a}$．

① 令 $g(x)_{\min}\geqslant h(x)_{\max}$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{a}$，故 $a\geqslant 1$(此范围可能偏小)；

② 当 $0<a<1$ 时，易知不等式对 $x=1$ 不成立．

所以，$a\geqslant 1$．

方法 11(凹凸转化 2——差型)　本题作为改编题，第(1)题中研究函数 $f(x)=ae^{x-1}-x$，$f'(x)=ae^{x-1}-1$．当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1-\ln a)$ 上单调递减，在 $(1-\ln a,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)\geqslant f(1-\ln a)=\ln a$．要证 $f(x)+x-1\geqslant \ln x-\ln a$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立($a>0$)，即 $f(x)\geqslant \ln x-x+1-\ln a$．令 $g(x)=\ln x-x+1-\ln a$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，从而 $g(x)\geqslant g(1)=-\ln a$．

① 令 $\ln a\geqslant -\ln a$，则由 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$，故 $a\geqslant 1$(此范围可能偏小)；

② 当 $0<a<1$ 时，令 $x=1$，则左 $=f(1)+1-1=a-1<0$，右 $=\ln 1-\ln a>0$，即不等式不成立．

所以，$a\geqslant 1$．

这一思路中的凹凸转化方法，一方面需要学生熟悉常见函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 与 $y=\dfrac{e^x}{x}$ 的图象以及 $y=\ln x-x$ 与 $y=e^x-x$ 的图象；另一方面，在恒成立问题中使用凹凸转化时，求出 a 的范围偏小，要得到正确的 a 的取值范围，需要进一步分析．

6　结语

本题为指、对混合的不等式恒成立问题，解题思路非常广泛，用所有处理指对混合式的方法基本都可以解决，可见此题非常经典，擅长各种方法的学生都可以上手一试．