回归 · 拓广 · 升华
——以一道解三角形试题的分析历程为例*

王　耀　（江苏省苏州第一中学　215006）

摘　要：解三角形是数学高考中重点考查内容之一，正弦定理和余弦定理是解决有关三角形问题的两个重要定理.本节课以一道习题的分析为素材，通过知识梳理、教材溯源、问题解决等教学活动，让学生通过自主探索、合作交流、拓广探究等方式，丰富对正余弦定理的整体认识，在学习过程中感受到学习的快乐.因此，教师在备课复习时，应善于引导学生关注碎片、零散知识背后的结构、联系和规律，注重问题解决过程中的思维经验的积累，追求知识能力的应用和迁移.

关键词：解三角形；问题解决；拓广探究；数学思维

文章编号：1004-1176(2022)07-0071-05

笔者在近期的高三一轮复习中，发现一道解三角形选择题的准确率不高，于是以此为契机，精心构思，通过师生合作将一些相关知识点完美串联起来，具体讲评历程整理如下.

1　问题呈现

已知非等腰 $\triangle ABC$ 的内角分别是 A，B，C，其外接圆 O 的半径 R 为 1，延长角 A 的平分线交圆 O 于点 A_1，则 $\dfrac{\sin B+\sin C}{AA_1\cos\dfrac{A}{2}}=$（　）.

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.1　　C.$\dfrac{3}{2}$　　D.2

2　知识梳理

目前江苏省使用的新教材（人教 A 版、苏教版）中，对正弦定理都利用向量这一工具进行证明.证法区别在于：人教版新教材利用过点 A 作单位向量 $\boldsymbol{j}$ 使得 $\boldsymbol{j}\perp\overrightarrow{AC}$，利用 $\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$ 后，化简得证；苏教版新教材是利用边 BC 上的高 AD，通过 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，即利用 $\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=0$ 获证.

两部教材中的正弦定理都没有体现与外接圆半径的关系，只有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.然而在教材习题中，都不约而同地出现了对 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径）的拓广探究：

教材溯源 1　（人教版教材第 54 页“综合运用”第 17 题）证明：设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径是 R，则 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

教材溯源 2　（苏教版教材第 96 页“探究 · 拓展”第 10 题）在 Rt$\triangle ABC$ 中，斜边 c 等于 Rt$\triangle ABC$ 的外接圆的直径 $2R$，故有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，这一关系对任意三角形也成立吗？探索并证明你的结论.（教材给出了三角形的外接圆图形，并利用数学软件展示计算结果.）

简证　（1）当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，外接圆 O 半径为 R，如图 1，连结 BO 并延长，交外接圆于点 A_1，连结 A_1C，则圆周角 $\angle A_1=\angle A$.

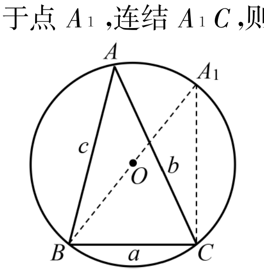

图 1

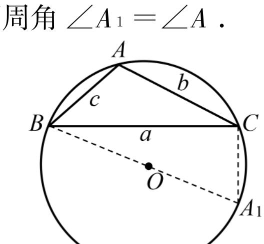

图 2

因为 A_1B 为外接圆的直径，长度为 $2R$，所以 $\angle A_1CB=90^\circ$，则 $\sin A_1=\dfrac{BC}{A_1B}=\dfrac{a}{2R}$，即 $a=2R\sin A_1=2R\sin A$.同理，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

* 本文是江苏省教育科学“十三五”规划 2018 年度立项课题“基于‘三教’理念的高中数学概念教学研究”（编号：D2018/02/203）的研究成果之一.

(2)如图 2,当$\triangle ABC$是钝角三角形时,不妨设角 A 为钝角,外接圆 O 半径为 R,连结 BO 并延长,交外接圆于点 A_1,连结 A_1C,所以 $\angle A_1CB=90^\circ$,圆周角 $\angle BA_1C=180^\circ-\angle BAC$.则$\frac{a}{2R}=\sin\angle BA_1C=\sin(180^\circ-A)=\sin A$,即 $a=2R\sin A$.类似可证 $b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$.综上得证正弦定理的推广形式.

3 问题解决

在批阅这道题时,笔者发现得分率相对较低,询问后得知即使答对的学生,也有部分是通过对三角形特殊化后"猜对"的答案.因此,在讲解前,笔者特地回顾教材,对正弦定理的来龙去脉进行回顾(知识梳理部分).这样处理后,许多学生再面对这道题时,得到以下解法:

解法 1 设 $\angle BAC=2\theta$,如图 3,由题意可得 $\angle AA_1C=B$,$\angle A_1CB=\frac{1}{2}\angle BAC=\theta$.

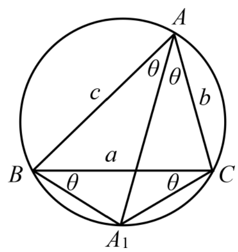

图 3

在$\triangle ACA_1$中,由正弦定理知$\frac{AA_1}{\sin\left(C+\frac{1}{2}\angle BAC\right)}=\frac{AA_1}{\sin(C+\theta)}=\frac{AC}{\sin\angle AA_1C}=\frac{AC}{\sin B}=2R=2$,可得 $AA_1=2\sin\left(C+\frac{1}{2}\angle BAC\right)=2\sin(C+\theta)$,即 $AA_1\cdot\cos\theta=2\sin(C+\theta)\cdot\cos\theta=2\sin C\cdot\cos^2\theta+2\cos C\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta=\sin C(1+\cos 2\theta)+\cos C\cdot\sin 2\theta=\sin C+\sin(C+2\theta)=\sin C+\sin(C+\angle BAC)=\sin C+\sin B$,所以$\frac{\sin B+\sin C}{AA_1\cos\frac{A}{2}}=1$,故选 B.

解法 1 中,通过初等几何知识(圆周角相等)以及正弦定理的拓广结论进行求解,让解题思维不只是"冰冷的美丽",能否继续展开"火热的思考",也是值得探究的问题.除了采用"化角"的转化策略,笔者也尝试进行"化边"转化,进而引导学生进行思考,将解法 2 的教学片段整理如下.

师:在解三角形中,由三角形的角平分线能想到什么性质或结论?

生 1:角平分线定理,设 AA_1 与 BC 交于点 D,$\angle BAC=2\theta$,则可知$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$(图 4).

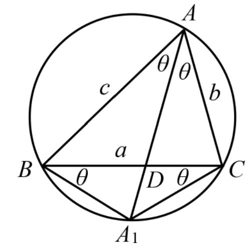

图 4

师:非常好,这时得到 $BD=\frac{ac}{b+c}$,$DC=\frac{ab}{b+c}$.现在$\triangle ABC$的外接圆中,BD 和 DC 都可以用边长来表示,要想表示 AA_1 的话,这几条线段的长度之间有什么联系吗?请回忆初中的平面几何知识.

生 2:相交弦定理,也就是利用$\triangle A_1BD\backsim\triangle CAD$ 可知 $BD\cdot DC=AD\cdot DA_1$.

师:生 2 讲得很全面,问题转化为求出角平分线 AD 的长度,怎么求解呢?

生 3:利用面积法,由$\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}bc\sin 2\theta$,得 $AD=\frac{2bc\cos\theta}{b+c}$.

师:上面对三角形中内角平分线的定性分析、定量计算,复习了经典的结论,现在请大家将上面的信息综合起来,推导一下线段 AA_1 的长度表达式.

生 4:由圆幂定理中的相交弦定理化简得到 $DA_1=\frac{a^2}{2(b+c)\cos\theta}$,则 $AA_1=AD+DA_1=\frac{4bc\cos^2\theta+a^2}{2(b+c)\cos\theta}=\frac{2bc(1+\cos 2\theta)+a^2}{2(b+c)\cos\theta}=\frac{2bc+a^2+(b^2+c^2-a^2)}{2(b+c)\cos\theta}=\frac{b+c}{2\cos\theta}$,即$2AA_1\cos\frac{A}{2}=b+c=2R(\sin B+\sin C)$,得$\frac{\sin B+\sin C}{AA_1\cos\frac{A}{2}}=R=1$.

评注 (1)这个解法中,综合运用了多个定理,如角平分线定理、相交弦定理、余弦定理、角平分线长公式等,其中,与角平分线相关的公式、定理都是命题中的热点,本文下面会举例说明.

(2)由上可知:$AD^2=\frac{4b^2c^2\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}=\frac{2c^2b^2(1+\cos A)}{(b+c)^2}=\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=bc-\frac{ab}{b+c}\cdot\frac{ac}{b+c}$,即 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$,这是角平分线长的一种表达

形式.

或由 $AD^2=\dfrac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}=\dfrac{bc\cdot 2p(2p-2a)}{(b+c)^2}=\dfrac{4bc\cdot p(p-a)}{(b+c)^2}$,得到 $AD=\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$,其中 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$;同理,角 B,C 的角平分线长分别为 $t_b=\dfrac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$,$t_c=\dfrac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$,这也是角平分线长的一种形式,与人教版新教材中第 53～54 页拓广探索部分中的海伦公式、三角形的中线公式、三角形的三条边上的高线公式形成了完美的补充.

解法 1 和 2 中,得到的 $b+c=2AA_1\cos\dfrac{A}{2}$ 这一结论,引起了学生的兴趣,纷纷感叹原来此题暗藏玄机啊.未曾料到,有一位学生就用初等几何的知识,很快证明了这个结论,解法 3 分享如下:

生 5:如图 5,过点 A_1 分别作 $A_1D\perp AB$,$A_1E\perp AC$,垂足为点 D,E,则 $AA_1\cos\dfrac{A}{2}=AD=AE$.

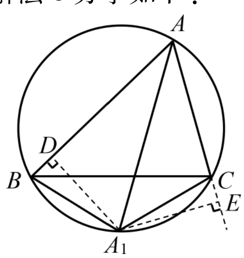

图 5

由 AA_1 平分$\angle BAC$可知 $A_1D=A_1E$,$A_1B=A_1C$,有 $A_1B=A_1C$,所以 $\mathrm{Rt}\triangle A_1BD\cong\mathrm{Rt}\triangle A_1CE$,有 $BD=CE$.则 $AB+AC=(AD+BD)+(AE-CE)=AD+AE=2AA_1\cos\dfrac{A}{2}$,即 $b+c=2AA_1\cos\dfrac{A}{2}$.

多么简洁的方法,的确让大家眼前一亮,笔者和学生一起感受这道题蕴涵的数学之美,也有学生提出能不能利用余弦定理来证明这个结论?结合前面的解法,师生讨论后发现这个方向是可行的.

解法 4 如图 6,设 $\angle BAC=A=2\theta$,则 $\angle BAA_1=\angle CAA_1=\angle BCA_1=\angle CBA_1=\theta$,可设 $A_1B=A_1C=x$.

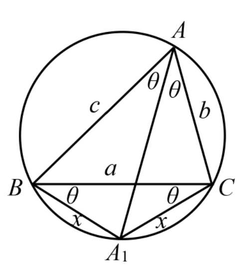

图 6

因为 $x\cos\theta=\dfrac{a}{2}$,得到 $x=\dfrac{a}{2\cos\theta}$;由余弦定理可知:$AA_1^2+c^2-x^2=2c\cdot AA_1\cdot\cos\theta$,即$(AA_1-c\cos\theta)^2=x^2-c^2+c^2\cos^2\theta=\dfrac{a^2}{4\cos^2\theta}-c^2\sin^2\theta=\dfrac{a^2-4c^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{4\cos^2\theta}=\dfrac{a^2-c^2\sin^2 A}{4\cos^2\theta}$,因为 $a\sin C=c\sin A$,所以 $a^2-c^2\sin^2 A=a^2-a^2\sin^2 C=a^2\cos^2 C$,则$(AA_1-c\cos\theta)^2=\dfrac{a^2\cos^2 C}{4\cos^2\theta}$,解得 $AA_1=c\cos\theta+\dfrac{a\cos C}{2\cos\theta}=\dfrac{2c\cos^2\theta+a\cos C}{2\cos\theta}=\dfrac{c+(c\cos A+a\cos C)}{2\cos\theta}$,由射影定理 $b=c\cos A+a\cos C$ 可知 $AA_1=\dfrac{c+b}{2\cos\theta}$.

真是条条大路通罗马啊,一道小题竟然可以有几种方法去研究它,不知不觉地就过了一节课.课后,笔者也意犹未尽,继续思考,得到如下更为简洁的解法:

解法 5 设 $\angle BAC=2\theta$,则 $\angle BAA_1=\angle CAA_1=\angle BCA_1=\angle CBA_1=\theta$,可设 $A_1B=A_1C=x$.在$\triangle AA_1B$ 和$\triangle AA_1C$ 中,由余弦定理可得:$\begin{cases}AA_1^2+c^2-x^2=2c\cdot AA_1\cdot\cos\theta,\\ AA_1^2+b^2-x^2=2b\cdot AA_1\cdot\cos\theta,\end{cases}$两式相减得 $2AA_1\cos\theta=\dfrac{b^2-c^2}{b-c}=b+c$.

4　拓展运用

为了巩固上文中的一些解题策略,笔者选取了几道习题供学生进行练习,升华思维.

例 1 (2018·江苏卷 13)在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c,$\angle ABC=120°$,$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D,且 $BD=1$,则 $4a+c$ 的最小值为______.

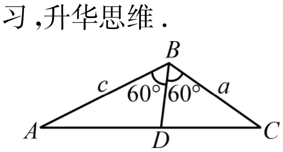

图 7

解析 因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$;又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}(a+c)\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a+c)$,所以 $ac=a+c$.那么,$a=\dfrac{c}{c-1}$,$4a+c=\dfrac{4c}{c-1}+c=\dfrac{4}{c-1}+(c-1)+5\geqslant 9$,当且仅当 $c=3$ 时取等号.

例 2 在$\triangle ABC$ 中,$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=3$,$|\overline{BC}|=$

$2\sqrt{6}$，其中 D,E 均为边 BC 上的点，分别满足 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，$\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，则 $|\overrightarrow{AE}|$ 的取值范围是______.

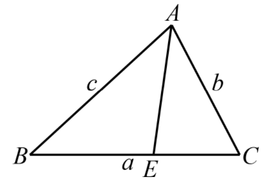

图 8

解析 由题知点 D 是 BC 中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}{4}=|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{|\overrightarrow{BC}|^2}{4}$，得 $|\overrightarrow{AD}|=3$.

设 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，则由 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2=2(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2)$，可知 $4|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=2(b^2+c^2)=60$，即 $b^2+c^2=30$.

在△ABC 中，由 $\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 可知 AE 平分角 A，则由解法 2 可知 $|\overrightarrow{AE}|^2=\frac{2b^2c^2+bc(b^2+c^2-a^2)}{(b+c)^2}=\frac{bc(6+2bc)}{30+2bc}=\frac{bc(bc+3)}{bc+15}$.

因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，则 $bc\leqslant 15$. 又因为 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，则 $bc=\frac{3}{\cos A}>3$. 设 $bc=t(3<t\leqslant 15)$，则 $y=\frac{t^2+3t}{t+15}=\frac{t(t+15)-12t}{t+15}=(t+15)+\frac{180}{t+15}-27\in(1,9]$，即 $|\overrightarrow{AE}|\in(1,3]$.

评注 此题也可以运用几何法进行直观想象，即利用角平分线定理构造调和点列，得到结果，但是用解析法进行逻辑推理更加严谨，可培养学生数学推理、数学运算的能力.

例 3 已知△ABC 中角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，△ABC 的角平分线 AD,CE 交于点 O，证明：$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

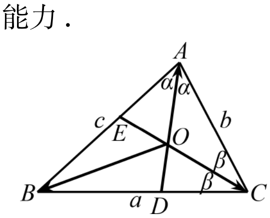

图 9

证明 由角平分线定理可知 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$，得到 $\frac{BD}{BC}=\frac{c}{b+c}$，$BD=\frac{ac}{b+c}$，$CD=\frac{ab}{b+c}$. 所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\frac{c}{b+c}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})$，得 $\overrightarrow{OD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$. 又因为在△$ACD$ 中，$\frac{CA}{CD}=\frac{AO}{OD}=\frac{b}{\frac{ab}{b+c}}=\frac{b+c}{a}$，得 $\overrightarrow{OD}=-\frac{a\overrightarrow{OA}}{b+c}$.

因此，$\frac{a}{b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，即 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

评注 在人教版新教材第 64 页中，让学生用向量法研究三角形的性质进行数学探究的研究活动，本例恰好是在所学知识基础上，对三角形的内心进行向量表示的完美体现.

例 4 （2021 · 全国 I 卷 19）记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $b^2=ac$，点 D 在边 AC 上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；（2）若 $AD=2DC$，求 $\cos\angle ABC$.

分析 （1）由正弦定理易证；（2）如图 10，由 $AD=2DC$ 可知 $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

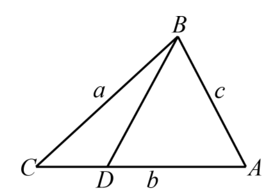

图 10

由 $BD=b$ 有 $b^2=\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}c^2+\frac{4ac\cos\angle ABC}{9}=\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}c^2+\frac{2(a^2+c^2-b^2)}{9}$，得 $11b^2-6a^2-3c^2=0$. 又因为 $b^2=ac$，则 $11ac-6a^2-3c^2=0$，即 $(2a-3c)(3a-c)=0$，解得 $a=\frac{1}{3}c$ 或 $a=\frac{3}{2}c$. 当 $a=\frac{1}{3}c$ 时，$\cos\angle ABC=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{7}{6}>1$（舍）；当 $a=\frac{3}{2}c$ 时，$\cos\angle ABC=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$.

评注 这道题虽是中档题，但是从学生反馈来看，不少人用时较多. 可见，将未知的问题转化为熟悉的结构特征，选择有效的转化策略尤为重要，本题由定比分点进行向量表示是最高效的解题途径.

5　教学感悟

（1）回归教材，理解数学

2017 年版课程标准指出，通过高中数学课程的学习，获得进一步学习以及未来发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验(简称“四基”)；提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力(简称“四能”).高考命题的依据是“课标”“考纲”与“教材”，命题源于教材但又高于教材，这是全体高三教师的共识.那么，高三数学备考的课堂教学中，提升“四基”“四能”，离不开对教材的深刻理解.章建跃教授近年来倡导的“理解数学”[1] 引起了广泛的关注，他提出，教好数学的前提是要理解数学，只有理解数学知识的本质，才能积累教学知识的表达经验.

的确，通过文中分析的这道题不难看出，对于广大师生而言，理解教材是教师教好数学、学生学好数学的关键，教材中的定理和一些典型的例习题之间常具有一定的关联性，其中渗透了某些经典的数学思想方法.因此，在高三的复习工作中，要认真研读教材，充分发掘教材的使用价值，通过对教材的深入思考与研究，帮助学生系统地梳理知识，构建知识网络.例如，本文中通过对正弦定理背景下的习题讲评的设计，师生共同探究问题的背景、方法和联系，帮助学生积累问题解决过程中常用的解题经验.

（2）拓展探究，建构数学

教学的目的是使学生学会未知的知识，逐步由“学会”到“会学”.也就是说，学生在学习过程中接受新知识，更重要的是要学会如何独立思考.因此，笔者认为给学生提供合适的研究对象，进行拓展研究，显得尤为必要.这些素材广泛分布在教材中，例如正文、思考、旁白、例习题等.

在高考复习教学中，如果只是对知识点重复罗列，无法提高学生学习的参与度和内驱力.不妨注重联系，“合纵连横”地进行知识体系的再建构，即通过“点—线—面”的方式，将教材中的关联知识点灵活呈现[2]，在教师的引领下，学生对概念、定理、公式的来龙去脉进行再认识，对教材知识进行再巩固，提高知识综合运用的能力，提升问题解决的成功率.

本节课中研究的问题，与三角函数、向量、正弦定理、余弦定理、不等式、初等几何等知识之间有着密切的联系，这些知识都是解决几何问题的有力工具.通过对其中分析思维历程的展示，让学生领会到知识的精髓，积累数学探究的活动体验.

（3）强化运用，升华思维

以“微点”入手的课堂教学是近年来高三数学复习中的常见课型[3]，教师精心选择素材，结合归类设计、变式开发等手段完善讲评策略，通过学生自主探究、师生合作探究，对知识进行运用和拓展，探究解法联系，还原问题本原，从而引导学生积极、主动地矫正思维问题，深入体会数学思想方法，拓宽思维的广度，发掘思维的深度，进一步完善知识结构.这样的课堂设计，常需要从微观和宏观两个层面进行构思，师生积极参与，使高三的数学课堂充满生机活力，对学生思维的发展、创新精神的培养和实践能力的提高有积极的作用，对教师课堂教学效率和品位的提高有参考价值.

通过本节课中的问题解决过程发现，解法之间有联系，更有创新，各具特色，解题过程不再是“冰冷的形式化美丽”，而是那种发散的、火热的思考过程，达到了数学思维的自然流淌.由此可见，面对数学问题，只要我们学会广泛的联想和生动的类比，我们就会拥有宽阔的思路，探究出各式各样的方法.如果在解题过程中，对于每一个细节再进一步深入思考，继续追寻下去，那么解法还能不断改进，不断优化，化复杂为简单，聚分散为统一.这一切不仅可以提高我们发现问题、解决问题的能力，更是一种数学美的享受.

总之，提高学生的问题解决能力和提升学生的数学思维品质，是数学解题教学的永恒主题.作为教者，应善于引导学生重视知识背后的结构、联系和规律，积累问题解决过程中的思维经验，追求知识能力的应用和迁移，从而让教师的课堂教学更加精彩，最大限度地促进学生数学素养的有效落实.

参考文献

[1] 章建跃.理解数学是教好数学的前提[J].数学通报，2015(1)：61-63.

[2] 胡福林.回归教材，注重探究，促进学生的思维发展——“正弦定理和余弦定理”一轮复习与反思[J].中学数学月刊，2015(1)：10-12.

[3] 王耀.多元表征学习：让数学思维丰富深刻——以一道高考试题的问题解决为例[J].中国数学教育(高中版)，2019(12)：47-51.